



# Adaptation élastoplastique et homogénéisation périodique

Hélène Magoariec

## ► To cite this version:

Hélène Magoariec. Adaptation élastoplastique et homogénéisation périodique. Mécanique [physics.med-ph]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2003. Français. NNT : . tel-00007063v2

**HAL Id: tel-00007063**

**<https://theses.hal.science/tel-00007063v2>**

Submitted on 8 Oct 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE (AIX-MARSEILLE II)  
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE MÉCANIQUE DE MARSEILLE

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE II

*Discipline : MÉCANIQUE*

*Option : SOLIDES*

présentée et soutenue publiquement

par

**Hélène MAGOARIEC**

le 3 décembre 2003

---

**ADAPTATION ÉLASTOPLASTIQUE ET  
HOMOGÉNÉISATION PÉRIODIQUE**

---

**Directeur et Co-directeurs de thèse :**

Olivier DÉBORDES  
Stéphane BOURGEOIS et Dieter WEICHERT

**JURY**

MM.	G.	DE SAXCÉ	Président, Rapporteur
	Q. S.	NGUYEN	Rapporteur
	J.-C.	MICHEL	Examinateur
	S.	BOURGEOIS	Examinateur
	O.	DÉBORDES	Examinateur
	D.	WEICHERT	Examinateur
	A.	HACHEMI	Invité







UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE (AIX-MARSEILLE II)  
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE MÉCANIQUE DE MARSEILLE

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE II

*Discipline : MÉCANIQUE*

*Option : SOLIDES*

présentée et soutenue publiquement

par

**Hélène MAGOARIEC**

le 3 décembre 2003

---

**ADAPTATION ÉLASTOPLASTIQUE ET  
HOMOGÉNÉISATION PÉRIODIQUE**

---

**Directeur et Co-directeurs de thèse :**

Olivier DÉBORDES  
Stéphane BOURGEOIS et Dieter WEICHERT

**JURY**

MM.	G.	DE SAXCÉ	Président, Rapporteur
	Q. S.	NGUYEN	Rapporteur
	J.-C.	MICHEL	Examinateur
	S.	BOURGEOIS	Examinateur
	O.	DÉBORDES	Examinateur
	D.	WEICHERT	Examinateur
	A.	HACHEMI	Invité



*A mes proches ...*





## Remerciements

Le présent mémoire reflète trois années de recherche effectuées au sein de l'équipe "Modèles Numériques" du LMA - Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille, équipe située dans les murs de l'ESM2 - Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille. Je désire donc tout d'abord remercier toutes les personnes que j'ai pu côtoyer durant ces trois années, et qui ont, de près ou de loin, participé à leur bon déroulement, tant au niveau scientifique, qu'amical ou encore personnel. Une certaine émotion accompagnant inévitablement la fin d'une telle aventure, que les éventuels oubliés de ces remerciements me pardonnent.

J'adresse donc mes tous premiers remerciements à mes directeurs de thèse, MM. Stéphane BOURGEOIS, Olivier DÉBORDES et Dieter WEICHERT. Merci Stéphane, ce fut un réel plaisir de travailler et de réfléchir avec toi : tes compétences, ta disponibilité et ta bonne humeur (comment impose-t'on  $\sigma.n = 0$  dans SIC déjà?!?) ont rendu mes années de thèse très agréables. Merci Olivier pour la confiance que tu m'as témoignée en me laissant souvent l'initiative dans nos travaux de recherche, ainsi que dans la gestion de ma thèse, tout en me faisant bénéficier de ton expérience de chercheur plus que passionné. Et enfin, merci M. WEICHERT pour m'avoir toujours particulièrement bien accueillie, tant humainement que scientifiquement, lors de mes séjours dans votre institut en Allemagne.

Ma reconnaissance s'adresse ensuite aux autres membres de mon jury : M. Géry DE SAXCÉ, rapporteur puis président, M. Quoc-Son NGUYEN, rapporteur et MM. Jean-Claude MICHEL et Mustapha Abdelkader HACHEMI (mon fournisseur officiel de bibliographie), examinateurs, pour avoir respectivement accepté de rapporter sur mon travail de thèse et de l'examiner. Je vous remercie de l'intérêt que vous avez porté à mon travail et reste très sincèrement flattée et émue d'avoir, pour celui-ci, reçu vos félicitations. Enfin, ceci peut paraître anecdotique, mais mérite d'être souligné : merci à tous d'être venus à Marseille malgré une météo quelque peu capricieuse ...

Sans monitorat, cette thèse n'aurait pas eu la même saveur : merci donc à mon tuteur dans cette formidable expérience, M. Alain GARINO, ainsi qu'à M. Philippe CAMINAT, pour la confiance qu'ils m'ont accordée en me donnant de nombreuses responsabilités, que j'ai assumées avec un extrême bonheur.

Des scientifiques sans administratifs ne seraient rien : merci donc à tout le personnel de l'ESM2 et du LMA, pour sa disponibilité et sa gentillesse, avec une pensée particulière pour Mmes Dominique BIGLIAZZI, Christiane ARZOUMANIAN et Michèle JAMMY.

Comment qualifier l'ambiance régnant au coeur de l'équipe MN ? Difficile de répondre tant on s'y sent bien ... Les souvenirs de ces trois années seront nombreux et, pour cela, merci à tous les membres de cette fabuleuse équipe ! Citons tout d'abord quelques permanents : merci à M. Bruno COCHELIN pour les discussions que l'on a pu avoir, ta simplicité et tes excellents conseils ;

merci à MM. Thierry DESOYER et Jean GARRIGUES, pour les mêmes raisons assaisonnées de quelques mémorables parties de mots fléchés. Et puis il y a ceux qui passent mais que l'on n'oublie pas pour autant : les locataires des bureaux 109 et 110. Ne pouvant les citer tous, voici ici une petite sélection où chacun se reconnaîtra : Celui qui avait des crampes d'inactivité ... le même qui n'avait que deux pieds ..., Celui qui venait au bureau avec 40.2 de fièvre, Celui qui affectionnait les bikardises, Celle qui avait un bébé, Celui qui disait "Enfin, moi c'que j'en pense ...", Celle qui était toujours en retard, Celui qui ne répondait jamais aux mails, Celle qui se mariait, Ceux qui cherchaient un peu plus loin, Celui (der Mystiker) qui simulait des courses de pot (encore merci), Celui qui n'abusait jamais d'aucun plaisir, et enfin le petit dernier : Celui qui travaillait à mi-temps. Une pensée également pour quelques "presque MN" bien sympathiques : Celui qui disait "quoi-quoi-quoi", Celle qui aimait chanter le lundi, Celui qui adorait faire du vélo, Ceux qui étaient moniteurs et Celui qui donnait une "formation d'anglais".

Que ces remerciements s'envolent également vers ma famille et mes proches, qui ont su comprendre que la thèse, et en particulier la troisième année, n'est assurément pas le moment le plus propice aux visites et autres sorties familiales. Enfin, ceux qui le connaissent savent que je ne pourrais décemment clore ces remerciements sans avoir une pensée pour lui : CÉDRIC, un grand Merci à toi, et bien plus encore ...

# SOMMAIRE

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre I Adaptation, optimisation et homogénéisation : quelques aspects théoriques</b>	<b>5</b>
I.1 Des origines aux extensions de la théorie de l'adaptation élastoplastique . . .	7
I.1.1 Les débuts des théories de calcul de structures . . . . .	7
I.1.2 L'analyse limite et ses faiblesses . . . . .	8
I.1.3 La théorie classique de l'adaptation élastoplastique . . . . .	11
I.1.4 Les extensions de la théorie classique . . . . .	12
I.1.5 Traitements numériques de la théorie de l'adaptation . . . . .	16
I.2 La programmation mathématique, un outil pour l'adaptation . . . . .	19
I.2.1 Bref historique de la programmation mathématique . . . . .	19
I.2.2 Classification des problèmes d'optimisation et méthodes de résolution associées . . . . .	22
I.2.3 Utilité du Lagrangien augmenté . . . . .	29
I.2.4 Schéma de synthèse . . . . .	29
I.3 Théorie de l'homogénéisation en élasticité . . . . .	31
I.3.1 Origine et intérêt de la théorie . . . . .	31
I.3.2 Principes généraux de l'homogénéisation en élasticité . . . . .	33
I.3.3 L'étape de localisation en détails : les différentes approches . . . . .	37
I.3.4 Une branche particulière : l'homogénéisation périodique . . . . .	43
I.3.5 Cas de structures fines perforées, sollicitées dans leur plan . . . . .	45
I.3.6 Cas des plaques périodiques sollicitées en membrane et en flexion . . .	47
I.4 Bilan du chapitre . . . . .	49
<b>Chapitre II Phénomène d'adaptation de structures élastoplastiques</b>	<b>51</b>
II.1 Cadre de travail classique . . . . .	53
II.1.1 Milieu 3D étudié et chargements imposés . . . . .	53
II.1.2 Hypothèses de base et conséquences . . . . .	54

II.1.3	La notion de contraintes résiduelles . . . . .	56
II.2	Les différents types de comportements d'une structure élastoplastique sous chargements variables . . . . .	58
II.2.1	Réponse purement élastique . . . . .	58
II.2.2	Effondrement instantané par écoulement illimité . . . . .	58
II.2.3	Effondrement incrémental par accumulation de déformations plas- tiques . . . . .	59
II.2.4	Plasticité alternée et fatigue oligocyclique . . . . .	60
II.2.5	Adaptation par stabilisation des déformations plastiques . . . . .	61
II.3	Mise en évidence du phénomène d'adaptation . . . . .	61
II.3.1	Etude expérimentale de KÖNIG . . . . .	62
II.3.2	Etude analytique d'une poutre en flexion pure . . . . .	64
II.3.3	Etude numérique d'une poutre en flexion . . . . .	67
II.4	Les deux théorèmes de base de la théorie de l'adaptation d'une structure . .	71
II.4.1	Théorème d'adaptation statique de MELAN . . . . .	72
II.4.2	Coefficient de sécurité à l'adaptation . . . . .	74
II.4.3	Théorème d'adaptation cinématique de KOITER . . . . .	76
II.5	Bilan du chapitre . . . . .	78
<b>Chapitre III</b>	<b>Adaptation de matériaux hétérogènes périodiques</b>	<b>81</b>
III.1	Quelques éléments bibliographiques . . . . .	84
III.1.1	Couplage entre homogénéisation et analyse limite . . . . .	84
III.1.2	Couplage entre homogénéisation et adaptation . . . . .	85
III.1.3	Conclusions et motivations de notre étude . . . . .	86
III.2	Considérations générales . . . . .	86
III.2.1	Hypothèses matériaux . . . . .	87
III.2.2	Matériaux à microstructure périodique . . . . .	87
III.2.3	Chargements macroscopiques imposés . . . . .	88
III.2.4	Deux types de cellules de base . . . . .	90
III.3	Approche statique du couplage entre homogénéisation et adaptation . . . . .	91
III.3.1	Formulation du couplage . . . . .	91
III.3.2	Problèmes cellulaires purement élastiques . . . . .	92
III.3.3	Problèmes aux contraintes résiduelles . . . . .	94
III.3.4	Problèmes de maximisation associés . . . . .	96
III.3.5	Coefficient de sécurité et chargement supportable . . . . .	98
III.4	Approche cinématique du couplage . . . . .	99
III.4.1	Formulation du couplage . . . . .	99

III.4.2	Problème de minimisation associé . . . . .	100
III.5	Exemple illustratif d'un stratifié à déformation imposée . . . . .	102
III.5.1	Position du problème tridimensionnel . . . . .	102
III.5.2	Simplification du problème par exploitation des invariances matérielles	103
III.5.3	Remarques préliminaires aux calculs analytiques . . . . .	107
III.5.4	Approche statique pour une sollicitation en cisaillement pur . . . . .	108
III.5.5	Approche cinématique pour une sollicitation en cisaillement pur . . .	112
III.6	Exemple illustratif d'un stratifié à contrainte imposée . . . . .	114
III.6.1	Problème 3D, chargement imposé et points de charges . . . . .	114
III.6.2	Calcul des contraintes élastiques par couche . . . . .	115
III.6.3	Approche statique pour une sollicitation en cisaillement pur . . . . .	116
III.6.4	Approche cinématique pour une sollicitation en cisaillement pur . . .	120
III.7	Bilan du chapitre . . . . .	122
<b>Chapitre IV</b>	<b>Mise en œuvre numérique des couplages</b>	<b>125</b>
IV.1	Discrétisation des domaines de chargements . . . . .	127
IV.2	MEF en déplacements et notations associées . . . . .	128
IV.2.1	Discrétisation par éléments finis . . . . .	128
IV.2.2	Intégration numérique . . . . .	132
IV.3	Discrétisation du problème cellulaire élastique . . . . .	132
IV.3.1	Formulation variationnelle spécifique . . . . .	133
IV.3.2	Technique du noeud macroscopique . . . . .	136
IV.3.3	Problème purement élastique discrétisé . . . . .	137
IV.3.4	Prise en compte des relations de périodicité sur les déplacements . . .	138
IV.4	Discrétisation du problème aux contraintes résiduelles . . . . .	140
IV.4.1	Formulation variationnelle spécifique . . . . .	140
IV.4.2	Problème discrétisé et matrice d'équilibre . . . . .	140
IV.4.3	Prise en compte des relations de périodicité sur les déplacements virtuels	142
IV.4.4	Distinction déformation/contrainte imposée . . . . .	142
IV.4.5	Stockage optimisé de la matrice d'équilibre . . . . .	143
IV.5	Problèmes d'optimisation discrétisés . . . . .	143
IV.5.1	Discrétisation de l'approche statique . . . . .	144
IV.5.2	Discrétisation de l'approche cinématique . . . . .	145
IV.5.3	Obtention des domaines de résistances macroscopiques . . . . .	146
IV.6	Récapitulatif d'un calcul de résistance à l'élasticité, à l'adaptation et à l'ana- lyse limite . . . . .	147
IV.7	Bilan du chapitre . . . . .	149

<b>Chapitre V Validations et applications de la méthode numérique développée</b>	<b>151</b>
V.1 Etude d'un matériau stratifié 1D-périodique . . . . .	153
V.1.1 Présentation du problème . . . . .	153
V.1.2 Choix et maillage de la cellule de base . . . . .	154
V.1.3 Simulations numériques par l'approche statique . . . . .	155
V.1.4 Simulations numériques par l'approche cinématique et réflexions . . . . .	164
V.2 Etude d'une structure fine perforée, sollicitée en contrainte dans son plan . . . . .	166
V.2.1 Présentation du problème tridimensionnel . . . . .	166
V.2.2 Choix de la cellule de base . . . . .	167
V.2.3 Tracé des différents domaines de résistance macroscopiques . . . . .	168
V.3 Etude de plaques périodiques hétérogènes en membrane et en flexion . . . . .	170
V.3.1 Etude d'une plaque homogène . . . . .	170
V.3.2 Etude d'une plaque renforcée 1D-périodique . . . . .	172
V.3.3 Etude d'une plaque trouée 2D-périodique . . . . .	173
V.4 Etude d'un matériau 3D-périodique à inclusions sphériques . . . . .	175
V.4.1 Présentation du problème tridimensionnel . . . . .	175
V.4.2 Choix, maillage et chargement de la cellule de base . . . . .	176
V.4.3 Domaines macroscopiques à contrainte imposée . . . . .	177
V.5 Bilan du chapitre . . . . .	178
 <b>Conclusion générale</b>	 <b>181</b>
 <b>Table des figures</b>	 <b>185</b>
 <b>Liste des tableaux</b>	 <b>189</b>
 <b>BIBLIOGRAPHIE</b>	 <b>191</b>
 <b>Annexes</b>	 <b>201</b>
 <b>Annexe A Les algorithmes d'optimisation de LANCELOT</b>	 <b>1</b>
A.1 SBMIN, un algorithme d'optimisation "sans contraintes" . . . . .	2
A.2 AUGLAG, un algorithme d'optimisation avec contraintes . . . . .	3
 <b>Annexe B Quelques relations en théorie des poutres</b>	 <b>7</b>
B.1 Loi de comportement en flexion dans le domaine élastique . . . . .	8
B.2 Loi d'écrouissage . . . . .	9
B.3 Expression des déformations plastiques . . . . .	10

<b>Annexe C Optimisation et Coefficient de sécurité à l'adaptation</b>	<b>13</b>
<b>Annexe D Contraintes purement élastiques dans un stratifié bi-couche</b>	<b>15</b>





# Introduction générale

L'utilisation des matériaux composites dans de toujours plus nombreuses applications relevant des technologies de pointe, telles que –pour n'en citer que quelques unes– l'aéronautique, le génie civil ou encore la biomécanique, induit inévitablement la nécessité de savoir toujours mieux prédire leur comportement à long terme ainsi que leur capacité de résistance une fois incorporés dans un mécanisme en service. Les nombreuses recherches réalisées dans ce domaine, tant d'un point de vue académique qu'industriel, permettent de rendre finement compte des phénomènes microscopiques régissant indéniablement le comportement macroscopique de ces matériaux. En effet, leur caractère hétérogène implique une dépendance de leur rupture aux caractéristiques matérielles et géométriques de chaque constituant, mais également à leur interaction. Il est donc primordial d'appréhender les comportements à l'échelle microscopique pour pouvoir prévoir le comportement à l'échelle macroscopique, ce qui justifie l'importance d'une théorie telle celle de l'homogénéisation. Dans les situations pratiquement rencontrées en ingénierie, les structures ou mécanismes utilisant des matériaux, qu'ils soient hétérogènes ou non, sont la plupart du temps soumis à des sollicitations sinon toutes cycliques, du moins toutes variables dans le temps. C'est en ce sens que la théorie de l'adaptation élastoplastique devient utile. En effet, cette dernière permet d'étudier la tenue mécanique de milieux assujettis à des sollicitations variables et bornées. L'intérêt majeur de ce type d'analyse plastique tient au fait que c'est une méthode directe, ne nécessitant pas une connaissance précise de l'histoire du chargement, mais simplement une connaissance du domaine de variations dudit chargement. Compte-tenu de ces quelques remarques, notre étude se propose de coupler la théorie de l'adaptation élastoplastique avec une branche particulière de la théorie de l'homogénéisation : l'homogénéisation périodique, afin de développer une méthode numérique permettant d'étudier la tenue mécanique de milieux tridimensionnels, finement hétérogènes et périodiques, soumis à des sollicitations variables et bornées.

La méthode consiste à résoudre le problème d'adaptation sur une cellule de base, représentative des hétérogénéités du milieu périodique 3D, et à exprimer les résultats, par l'intermédiaire de relations de moyenne, en termes de domaines admissibles de chargements extérieurs : les contraintes et déformations macroscopiques. Numériquement, ceci se traduit par le couplage entre un code éléments finis, permettant de prendre en compte l'aspect homogénéisation du problème en formulant rigoureusement les relations de périodicité et de moyenne, et un logiciel d'optimisation sous contraintes, puisque de tout problème d'adaptation traité de façon directe

découle un problème d'optimisation sous contraintes. Le couplage est abordé essentiellement par l'approche statique de l'adaptation. Cependant, à des fins de comparaisons, l'approche cinématique est également utilisée pour un type de matériau.

Ce mémoire est organisé en cinq chapitres : les deux premiers revêtent un caractère bibliographique et illustratif, le troisième présente effectivement les couplages dont l'implémentation est exposée au quatrième ; et enfin, le dernier propose quelques simulations numériques validant les développements et reflétant les capacités de la méthode numérique proposée.

Le premier chapitre propose quelques rappels historiques sur les origines et principaux intérêts des différentes théories que nous sommes amenés à utiliser : la théorie de l'adaptation élastoplastique, la théorie de l'optimisation (en particulier l'optimisation non linéaire sous contraintes) et la théorie de l'homogénéisation (en particulier l'homogénéisation périodique). Sans prétendre être exhaustif, l'objectif de ce premier chapitre est de donner au lecteur une vue la plus générale possible de l'état de l'art pour chacune de ces trois théories, tout en lui fournissant les références bibliographiques utiles à la compréhension de leur évolution aux cours du temps.

Le second chapitre s'attache à décrire plus particulièrement l'une de ces trois théories, en présentant une étude plus précise du phénomène d'adaptation de structures. Après avoir défini le cadre de travail classiquement utilisé en théorie de l'adaptation, nous présentons les différents types de réponses susceptibles de se développer dans une structure. Notre étude s'intéressant à la réponse adaptée, le phénomène d'adaptation est ensuite mis en lumière au travers de trois approches : l'une expérimentale relatant les expériences de KOENIG, une seconde analytique illustrant la notion de contrainte résiduelle et une dernière numérique, illustrant le caractère énergétique du phénomène. Enfin, sont présentés les deux théorèmes classiques de la théorie : le théorème statique de MELAN et le théorème cinématique de KOITER, sur lesquels sont basés les couplages.

Le troisième chapitre expose donc ces couplages entre adaptation élastoplastique et homogénéisation périodique. Après quelques rappels bibliographiques concernant plus spécifiquement le couplage entre une théorie aux états limites et une théorie d'homogénéisation, on résume les conditions générales d'utilisation des théorèmes couplés. Sur ces bases, les couplages sont ensuite énoncés d'un point de vue statique, puis cinématique, en présentant les problèmes cellulaires et d'optimisation qu'ils impliquent de résoudre. Ce troisième chapitre se termine par une étude analytique permettant, non seulement d'illustrer simplement les couplages, mais également de mettre l'accent sur certaines difficultés qui leur sont inhérentes, et qui nécessiteront une attention particulière lors de la mise en œuvre numérique exposée au quatrième chapitre.

Ce quatrième chapitre présente effectivement l'implémentation numérique desdits couplages, permettant de traiter aussi bien des cellules de base 3D classiques que des cellules de base représentatives de milieux de type plaques périodiques, perforées ou non et sollicitées en membrane

---

et/ou en flexion. L'objectif n'est pas tant d'insister sur les difficultés techniques rencontrées lors de l'implémentation, que de présenter les raisonnements ayant permis, autant que faire se peut, de contourner ces difficultés. Les deux premiers paragraphes s'attachent donc à présenter les discrétisations temporelle et spatiale utilisées. On présente ensuite la discrétisation des problèmes cellulaires, en écrivant une formulation spécifique permettant de prendre en compte rigoureusement les relations de moyenne reliant les quantités microscopiques à leurs homologues macroscopiques. On aborde ensuite brièvement deux points techniques liés à la prise en compte des relations de périodicité et au stockage optimisé des données. Enfin, on énonce les problèmes d'optimisation discrétisés ainsi que les méthodes de résolution associées, afin d'obtenir des domaines de résistance dans l'espace des chargements macroscopiques.

Le dernier chapitre propose finalement quelques simulations numériques permettant d'une part de valider les développements réalisés, grâce à des comparaisons avec d'autres résultats de la littérature, et d'autre part de mettre en lumière les possibilités de la méthode numérique proposée. On applique dans un premier temps la méthode à un matériau stratifié, périodique dans une direction de l'espace. On s'intéresse en second lieu aux capacités de résistance d'une structure fine, périodiquement perforée et sollicitée dans son plan. On se place ensuite dans le cadre plus général de structures de type plaques périodiques : allant dans le sens croissant des difficultés, on traite dans un premier temps une plaque homogène sollicitée en membrane et en flexion, puis une plaque présentant une périodicité dans une direction de l'espace du fait de la présence de renforts en I, et enfin une plaque périodiquement trouée, toujours sollicitée en membrane et en flexion, mais présentant des propriétés de périodicité dans deux directions de l'espace. Finalement, le dernier exemple concerne un matériau élastoplastique renforcé par des inclusions élastiques sphériques, possédant donc des propriétés de périodicité dans les trois directions de l'espace.



# CHAPITRE I

## Adaptation, optimisation et homogénéisation : quelques aspects théoriques

---

**O**n présente dans ce premier chapitre les outils théoriques nécessaires à l'étude que l'on désire mener, à savoir l'étude de l'adaptation de matériaux élastoplastiques hétérogènes, à microstructure périodique, soumis à des chargements variables. Le chapitre débute donc par quelques rappels historiques mettant en lumière la nécessité d'une théorie telle que l'adaptation pour mener à bien des calculs de structures sous chargements variables. Tout problème d'adaptation traité de façon directe menant –on le montrera au Chapitre III– à un problème d'optimisation, on présente dans un deuxième temps et de façon concise, quelques bases de la théorie de l'optimisation. Finalement, dans l'objectif de traiter, plus tard, l'adaptation de matériaux hétérogènes, on s'intéresse en dernier lieu à la théorie de l'homogénéisation, qui permet d'étudier le comportement d'une structure hétérogène, en prenant finement en compte l'influence des hétérogénéités.

---

## PLAN DU CHAPITRE I

---

<b>I.1</b>	<b>Des origines aux extensions de la théorie de l'adaptation élastoplastique</b>	<b>7</b>
I.1.1	Les débuts des théories de calcul de structures . . . . .	7
I.1.2	L'analyse limite et ses faiblesses . . . . .	8
I.1.3	La théorie classique de l'adaptation élastoplastique . . . . .	11
I.1.4	Les extensions de la théorie classique . . . . .	12
I.1.5	Traitements numériques de la théorie de l'adaptation . . . . .	16
I.1.5.a	Approche incrémentale . . . . .	17
I.1.5.b	Approche directe . . . . .	18
<b>I.2</b>	<b>La programmation mathématique, un outil pour l'adaptation</b>	<b>19</b>
I.2.1	Bref historique de la programmation mathématique . . . . .	19
I.2.2	Classification des problèmes d'optimisation et méthodes de résolution associées . . . . .	22
I.2.2.a	Problèmes d'optimisation sans contraintes . . . . .	22
I.2.2.b	Problèmes d'optimisation avec contraintes . . . . .	26
I.2.3	Utilité du Lagrangien augmenté . . . . .	29
I.2.4	Schéma de synthèse . . . . .	29
<b>I.3</b>	<b>Théorie de l'homogénéisation en élasticité</b>	<b>31</b>
I.3.1	Origine et intérêt de la théorie . . . . .	31
I.3.2	Principes généraux de l'homogénéisation en élasticité . . . . .	33
I.3.2.a	Définition des échelles, choix du VER . . . . .	33
I.3.2.b	Méthode des moyennes . . . . .	34
I.3.2.c	Méthodologie de l'homogénéisation . . . . .	35
I.3.3	L'étape de localisation en détails : les différentes approches . . . . .	37
I.3.3.a	Un problème mal posé . . . . .	37
I.3.3.b	Les théories en déformation . . . . .	38
I.3.3.c	Les théories en contrainte . . . . .	40
I.3.3.d	Choix de l'homogénéisation périodique . . . . .	41
I.3.4	Une branche particulière : l'homogénéisation périodique . . . . .	43
I.3.4.a	Choix de la cellule de base . . . . .	43
I.3.4.b	Périodicité des champs microscopiques . . . . .	43
I.3.4.c	Problèmes cellulaires de localisation . . . . .	44
I.3.5	Cas de structures fines perforées, sollicitées dans leur plan . . . . .	45
I.3.5.a	Définition de la plaque perforée et de la cellule de base . . . . .	45
I.3.5.b	Opérateur moyenne et conditions limites . . . . .	46
I.3.6	Cas des plaques périodiques sollicitées en membrane et en flexion . . . . .	47
I.3.6.a	Définition de la structure périodique et de la cellule de base . . . . .	47
I.3.6.b	Chargements imposés et problèmes de localisation . . . . .	48
<b>I.4</b>	<b>Bilan du chapitre</b>	<b>49</b>

---

## I.1 Des origines aux extensions de la théorie de l'adaptation élastoplastique

Dans ce paragraphe, on présente au travers d'un historique non exhaustif, les différentes théories ayant trait au problème de la tenue d'une structure, selon la complexité des chargements qu'elle a à supporter une fois en service.

### I.1.1 Les débuts des théories de calcul de structures

Les premiers exemples de raisonnement concernant le calcul de la tenue de structures, au sens de stabilité d'ouvrages, apparaissent dès les 17<sup>ème</sup> et 18<sup>ème</sup> siècles, avec les travaux respectifs de GALILÉE (1638), qui réalisa des calculs à la rupture sur une poutre console, et de COULOMB (1773), qui s'intéressa à des problèmes d'architecture tels la résistance à la compression de certaines colonnes, ou encore la stabilité de murs ou de voûtes. Ces travaux marquent le début des méthodes de calcul à la rupture permettant, dans un premier temps, de ne conclure à la stabilité d'une structure qu'au travers de considérations d'équilibre statique et de résistance locale des matériaux constituant cette structure. Les limites de ces premières approches, qui permettaient de mener à bien des problèmes de dimensionnement, résidaient cependant dans le fait qu'en aucun cas elles ne tenaient compte des efforts intérieurs à la structure, ce qui conduisait à l'époque à des résultats surestimant, on le sait maintenant, les valeurs réelles des capacités de résistance cherchées. Ce sont ces valeurs excessives qui conduisirent d'autres chercheurs à s'intéresser de plus près à ce type de raisonnement, tels HOOKE, MARIOTTE, BERNOUILLI, EULER ou autre CAUCHY qui contribuèrent ainsi à la découverte de la théorie de l'élasticité. Cette nouvelle théorie permit, au 19<sup>ème</sup> siècle, de combler partiellement les lacunes évoquées précédemment, en attribuant des lois de comportement aux matériaux constitutifs de la structure étudiée. Les calculs de structures furent ensuite basés, durant très longtemps, sur les deux hypothèses suivantes :

- les perturbations imposées à la structure, ainsi que les déformations qui en résultent, restent petites,
- les matériaux constituant la structure sont supposés se comporter purement élastiquement.

Si la première de ces deux hypothèses est encore souvent utilisée aujourd'hui, la deuxième est cependant devenue discutable avec l'apparition, dès les 19<sup>ème</sup> et début du 20<sup>ème</sup> siècles, d'études sur les comportements inélastiques des solides, regroupées sous le terme de *plasticité*, dont les bases ont été posées, entre autres, par HILL (1950), PRAGER et HODGE (1951) et DRUCKER (1951). En effet, il a été montré que la présence de pré-déformations plastiques dans une structure faussait l'évaluation des champs de contraintes et de déformations issue d'un calcul purement élastique. Il semblait donc indéniable –les expériences le prouvaient– qu'il fallait prendre en compte la plasticité dans un calcul de structures.

Différentes théories, toutes relatives à la stabilité de structures, ont donc vu le jour au cours des siècles, pour finir, à force d'améliorations, par donner naissance à la théorie de l'élastoplasti-



citée permettant aujourd'hui de prendre rigoureusement en compte les phénomènes internes aux matériaux.

### I.1.2 L'analyse limite et ses faiblesses

Toutefois<sup>1</sup>, afin de calculer au mieux la réponse d'une structure élastoplastique, il est nécessaire de connaître le champ initial d'autocontraintes régnant dans cette structure, ainsi que l'histoire des chargements auxquels elle sera exposée une fois en service. La connaissance précise de ces renseignements devient donc rapidement une contrainte pour l'ingénieur, qui ne dispose avec précision que des informations globales suivantes :

- les types de chargements qu'aura à subir la structure, tels le vent, la neige, la pression de l'eau, certains déplacements, *etc*,
- le domaine de variations de chacun de ces chargements,

qui sont, sauf exception fâcheuse, entièrement déterminées. L'ingénieur est donc capable de borner les sollicitations qui seront subies par une structure dans des conditions normales d'utilisation, mais ne peut pas, en règle générale, prévoir l'intensité que prendra un chargement à un instant précis. Ces inconvénients majeurs, associés, non seulement au fait qu'un calcul mené à partir d'une histoire de chargements complètement déterminée serait long et fastidieux, mais également aux lacunes de la théorie de l'élasticité vis-à-vis d'un calcul à la rupture, justifient l'apparition, il y a une cinquantaine d'années, d'une nouvelle branche de la plasticité : la théorie de l'analyse limite, encore appelée théorie des charges limites. Cette théorie se scinde en deux approches, l'une statique et l'autre cinématique : les travaux de GVOZDEV (1936, 1938) et de GREENBERG et PRAGER (1949) sont respectivement à la base des énoncés des théorèmes statique (conduisant à une approximation par défaut des chargements limites) et cinématique (conduisant à une approximation par excès de ces chargements). Finalement, FEINBERG (1948), GVOZDEV (1949) et DRUCKER (1951) finissent de poser les rudiments de l'analyse limite, qui, autorisant des capacités de résistance bien plus élevées que celles calculées à partir de l'élasticité, attire sans conteste les ingénieurs soucieux de réaliser des constructions mécaniques économiquement toujours plus optimisées. Notons cependant que, si ces années 50 marquent traditionnellement les débuts des réelles fondations théoriques de l'analyse limite avec preuves des conjectures à l'appui, les premiers articles concernant l'application de cette théorie à des structures simples sont beaucoup plus anciens, datant d'il y a environ soixante quinze ans. De nombreuses méthodes utilisées à cette époque reposaient donc sur des hypothèses plastiques, sans en avoir pour autant les preuves théoriques rigoureuses, mais en supposant par exemple l'existence d'une pré-distribution de contraintes dans une structure avant tout calcul élastique. La naissance de la théorie des charges limites constitue donc une étape importante dans le processus d'élaboration de structures fiables. En effet, cette théorie permet de savoir si une structure donnée va résister

---

1. On parle ici de "faiblesses" relativement à l'objectif de notre étude, c'est-à-dire par rapport à l'aspect variable et borné des chargements considérés.

aux sollicitations qui lui sont imposées au cours du temps<sup>2</sup>, pourvu que :

- la géométrie n'évolue pas de manière significative entre le début et la fin du chargement : on se place donc dans le cadre des petites perturbations,
- les sollicitations soient imposées sous la forme d'un chargement proportionnel :

$$\mathcal{P}(t) = \lambda(t)\mathcal{P}^0 \quad (\text{I.1})$$

où  $\lambda : t \mapsto \lambda(t)$  est une fonction croissante du temps et  $\mathcal{P}^0$  un vecteur de chargements initiaux, appelé *chargement initial de référence*.

- les matériaux constitutifs de la structure aient un comportement élastique parfaitement plastique ou à écrouissage limité, obéissant au principe du travail plastique maximal. En d'autres termes, le critère de résistance choisi pour représenter la tenue de la structure doit être l'absence de déformations plastiques croissant indéfiniment sous sollicitations constantes.

Si l'on considère un espace de charges de dimension deux, c'est-à-dire si le chargement  $\mathcal{P}(t)$  se met sous la forme :

$$\mathcal{P}(t) = (\mathcal{P}_1(t), \mathcal{P}_2(t)) \quad (\text{I.2})$$

avec  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  indépendants, alors l'ensemble des charges limites  $(\mathcal{P}_1^l, \mathcal{P}_2^l)$  est représenté par une courbe fermée appelée *domaine des charges limites* (figure I.1), telle que tout trajet de chargements, défini par (I.3), monotone croissant et strictement inclus dans ce convexe, constitue un chargement potentiellement supportable par la structure.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1(t) &= \lambda(t) * \mathcal{P}_1^0 \\ \mathcal{P}_2(t) &= \lambda(t) * \mathcal{P}_2^0 \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

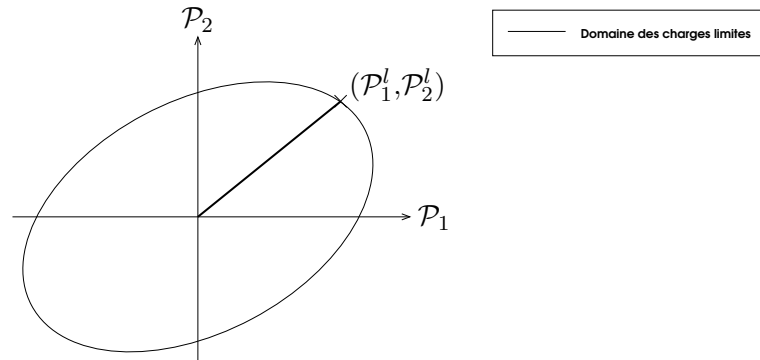


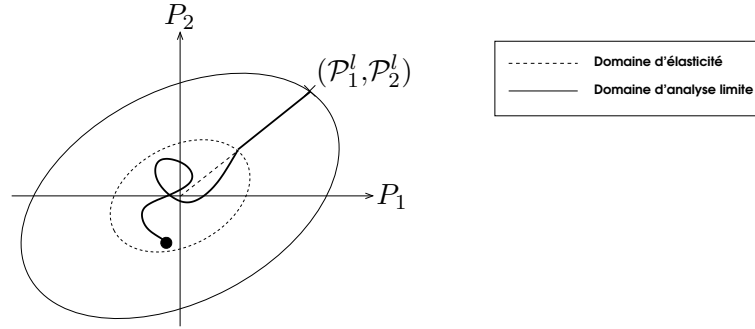
FIGURE I.1 – *Chargements limites*

---

2. Dans notre étude, les problèmes n'étant pas considérés d'un point de vue dynamique, le temps n'aura en fait aucune signification physique et sera simplement considéré comme un paramètre de charge.

**REMARQUE I.1**

Notons ici que l'aspect proportionnel du chargement  $\mathcal{P}(t)$  ne doit être vérifié qu'à l'extérieur du domaine d'élasticité. En effet, ce chargement peut évoluer de façon quelconque à l'intérieur du domaine d'élasticité, qui représente, au sens classique du terme, l'ensemble des chargements conduisant à un état de déformations et de contraintes purement élastiques dans la structure. Si l'on introduit le domaine d'élasticité dans la figure I.1, on représente alors sur la figure I.2 l'ensemble des chargements effectivement supportables vis-à-vis de l'état limite.

FIGURE I.2 – *Chargements élastiques et limites*

□

Cette théorie autorise donc un dimensionnement optimisé des structures en ce sens que les chargements supportables, calculés par des raisonnements d'analyse limite, sont bien plus élevés que ceux calculés par des raisonnements d'élasticité.

Cependant, dès les années 30, certains auteurs comme GRÜNING (1926), préconisèrent quelques précautions dans l'application des théorèmes de l'analyse limite, en particulier lorsque le chargement imposé à la structure variait de façon répétée. Ce type de chargement variable et répété peut, en effet, mener la structure à la rupture du fait d'une accumulation, durant le trajet de chargements, de déformations plastiques illimitées, induisant soit un phénomène de rochet, soit un phénomène d'accommodation (encore appelé plasticité alternée)<sup>3</sup>. Les deux types de rupture associés à ces phénomènes possèdent alors les caractéristiques suivantes :

- la rupture incrémentale associée au phénomène de rochet est la conséquence d'une augmentation graduelle mais temporellement illimitée des déformations permanentes dans la structure,
- la rupture par fatigue oligocyclique, associée au phénomène d'accommodation est la conséquence des changements de signe successifs des incréments de déformations plastiques durant le trajet de chargements.

Ces constatations mettaient donc, et mettent toujours, en défaut la fiabilité de la théorie de l'analyse limite dans le cas de chargements variables. En effet, comme l'on vient de le voir, cette

<sup>3</sup>. Le lecteur trouvera plus de détails sur ces phénomènes au chapitre II, paragraphe II.2, traitant des différents comportements d'une structure soumise à un chargement variable.

théorie permet de rendre compte de la ruine instantanée d'une structure soumise à un trajet de chargements proportionnels, mais ne permet en aucun cas de conclure quant à la résistance d'une structure sous chargements variables.

### I.1.3 La théorie classique de l'adaptation élastoplastique

— **Avertissement** — *Nous présentons ici un historique ainsi que quelques aspects généraux de la théorie de l'adaptation élastoplastique. Le lecteur désireux de rentrer dans le détail de la théorie pourra se rendre directement au Chapitre II.*

Hormis les phénomènes évoqués ci-avant, il se peut aussi qu'après un certain nombre de cycles de chargements, il s'établisse progressivement dans la structure un champ de contraintes résiduelles tel que –les variations des sollicitations ne provoquant plus que des déformations élastiques– les déformations plastiques cessent d'évoluer. Ce phénomène porte le nom d'adaptation et résulte en une valeur finie de l'énergie dissipée plastiquement puisque le comportement de la structure redevient, après une phase élastoplastique, purement élastique. C'est l'intérêt des chercheurs pour ce type de comportement qui, associé aux lacunes de l'analyse limite en cas de chargements autres que proportionnels, a conduit à l'élaboration d'une nouvelle théorie permettant d'étudier la tenue de structures sous chargements variables : la théorie de l'*adaptation élastoplastique*.

Bien que l'intérêt de la théorie de l'adaptation ne fut réellement reconnu que dans les années 70, les tous premiers travaux visant à prédire ce type de comportement adapté datent des recherches de BLEICH (1932), qui travailla sur une approche statique de l'adaptation pour un système de poutres en I. Ses recherches étaient alors motivées par la remarque suivante, qui est à la base de la théorie des ouvrages précontraints :

#### REMARQUE I.2

Si la superposition du champ initial d'autocontraintes et de la réponse en contraintes de la structure supposée purement élastique, est un champ de contraintes qui ne viole en aucun point le critère de plasticité, alors il ne peut y avoir de déformations plastiques dans la structure.



C'est sur la base des travaux de BLEICH que le phénomène d'adaptation put, quelques années plus tard, être appréhendé d'un point de vue plus général grâce aux travaux de MELAN (1936). En effet, ce dernier conjectura qu'une structure est en mesure de résister suffisamment longtemps aux sollicitations qui lui sont imposées, s'il existe en son sein un tel champ d'autocontraintes (non nécessairement le champ d'autocontraintes initial) et que le champ réel d'autocontraintes tend vers un tel champ, en d'autres mots, si ce champ d'autocontraintes s'adapte. Les travaux de MELAN (1936) concernant l'approche statique de l'adaptation et généralisant les études de GRÜNING et BLEICH, furent pionniers dans la discipline et débouchèrent sur un théorème d'adap-

tation<sup>4</sup> –fréquemment évoqué sous le nom de "**Théorème statique de MELAN**"– applicable, dans un premier temps, aux systèmes de poutres.

Cependant, si ces travaux constituent les rudiments de la théorie de l'adaptation et sont à l'origine de tous les développements ultérieurs se rapportant à l'approche statique de l'adaptation des structures, la théorie de l'adaptation, tout comme celle de l'analyse limite, se scinde en deux approches, l'une statique, et l'autre cinématique. L'intérêt pour la seconde approche n'apparut que quelques décennies plus tard avec les travaux de KOITER (1956) et (1960), qui proposa un théorème cinématique de non-adaptation pour des matériaux élastiques parfaitement plastiques, dont la contraposée fournit un critère d'adaptation, connu sous le nom de "**Théorème cinématique de KOITER**". Ces travaux constituent –au même titre que le théorème de MELAN pour l'approche statique– les fondements de l'approche cinématique de l'adaptation.

Ces deux théorèmes constituent donc ce qu'il est commun d'appeler la **théorie classique de l'adaptation**, qui –différence fondamentale avec la théorie de l'analyse limite– possède l'avantage remarquable de ne nécessiter aucune connaissance particulière de l'histoire du chargement, sinon celle d'être capable d'en donner un domaine de variations. C'est en ce sens que la théorie de l'adaptation généralise celle de l'analyse limite. Ces deux théorèmes étant fondamentaux à toutes les recherches ultérieures, on précise ici leur domaine de validité, par l'intermédiaire des hypothèses suivantes :

#### HYPOTHÈSE I.1

- transformations infiniment petites et isothermes,
- évolution quasi-statique,
- comportement élastoplastique parfait,
- modèle associé,
- milieu continu isotrope,
- effets de la température, de la viscosité, de l'écrouissage et de l'endommagement négligés.

La dualité entre les deux théorèmes, envisagée par KOITER (1960), fut ensuite démontrée par DÉBORDES (1976) dans le cadre mathématique rigoureux des fonctionnelles convexes.

#### I.1.4 Les extensions de la théorie classique

Ces hypothèses étant tout de même assez restrictives et bien loin de représenter correctement la réalité des situations rencontrées pratiquement par les ingénieurs et chercheurs, de nombreux

---

4. L'ébauche de la preuve du théorème statique d'adaptation par MELAN et celle du théorème statique d'analyse limite par GVOZDEV ayant été réalisées indépendamment l'une de l'autre, le fait que le théorème de MELAN implique celui de GVOZDEV ne sera reconnu que bien plus tard.

travaux de recherches eurent pour objet de généraliser les théorèmes classiques de l'adaptation, afin de construire, petit-à-petit, une théorie de l'adaptation la plus complète possible. L'objet de ce paragraphe est donc de présenter, au travers d'une liste non exhaustive<sup>5</sup>, les contributions relatives aux extensions de la théorie classique de l'adaptation.

• *Preuve du théorème de MELAN*

Les premières attentions se sont concentrées sur la démonstration du théorème de MELAN. L'ébauche de démonstration fournie par MELAN lui-même en 1938 fut en effet améliorée par les travaux de SYMONDS (1951) et de KOITER (1952). Cependant, la première amélioration la plus significative reste celle de KOITER (1960), qui, grâce à l'introduction d'un coefficient de sécurité supérieur à 1, démontra :

- la première partie de la conjecture de MELAN, c'est-à-dire la nécessité de l'existence d'un champ de contraintes résiduelles pour qu'il puisse y avoir adaptation d'une structure,
- la majoration du travail des déformations plastiques en cas d'adaptation.

La deuxième amélioration significative, qui finit de démontrer l'heureuse conjecture de MELAN, fut celle de DÉBORDES et NAYROLES (1976), qui, se basant sur les travaux de KOITER, ont démontré la deuxième partie de la conjecture de MELAN, à savoir que cette majoration du travail des déformations plastiques entraînait l'existence d'une limite pour le champ de contraintes résiduelles.

Le théorème de MELAN, bien qu'énoncé en 1938, ne fut donc entièrement démontré que trente-huit années plus tard. Entre temps cependant, de nombreux esprits estimant la conjecture de MELAN raisonnable, n'ont pas attendu cette preuve complète –et l'histoire leur donne raison– pour s'atteler à étendre au maximum ce théorème ainsi que celui de KOITER, en en révisant une à une les hypothèses.

• *Cas des sollicitations thermiques*

C'est ainsi que PRAGER (1956) et ROZENBLUM (1957), puis plus récemment GOKHFELD et CHERNIAVSKY (1980) et GROSS-WEEGE et WEICHERT (1992), se sont intéressés à l'extension du théorème statique au cas des sollicitations thermiques, théorème qui détient une importance particulière dans les systèmes de type conduite sous pression. Les deux premiers travaux ont été réalisés en supposant que les sollicitations thermiques n'induisaient qu'une modification des limites d'élasticité, mais des auteurs comme PONTER et KARADENIZ (1985) et GIAMBANCO et PALIZZOLO (1997) ont soulevé les difficultés à étendre le théorème de MELAN dans le cas où les fluctuations de température entraînent une modification des modules de YOUNG. L'extension du théorème cinématique de KOITER au cas des sollicitations thermiques a, quant-à-elle, été traitée par ROZENBLUM (1965), DE DONATO (1970) puis KARADENIZ et PONTER (1984).

---

5. Ces extensions ne concernant pas directement notre sujet d'étude, le lecteur est invité, pour des renseignements plus complets, à se reporter aux travaux de GOKHFELD et CHERNIAVSKY (1980), KÖNIG (1987), MRÓZ *et al.* (1995) et MAIER *et al.* (2000), qui présentent des états de l'art assez conséquents de la théorie de l'adaptation.

- *Cas des non linéarités géométriques*

L'influence des grandes transformations sur la résistance d'une structure fut tout d'abord étudiée par MAIER (1972), qui considéra des effets géométriques du second ordre et des surfaces d'écoulement linéaires par morceaux, et put ainsi étendre la théorie classique dans le cadre de développements éléments finis. Le domaine de validité de ces développements fut étudié par NGUYEN et GARY (1983) qui mirent en évidence le risque de déstabilisation du processus d'adaptation par le phénomène de rochet. Quelques temps après, KÖNIG et SIEMASZKO (1988) utilisèrent cette même méthode matricielle pour étudier également la stabilité des structures soumises à des non linéarités géométriques. Ces trois dernières décennies, de nombreux travaux eurent pour objectif d'outrepasser cette hypothèse restrictive d'effets du second ordre, afin de considérer de "véritables" grandes transformations. On ne cite ici que quelques unes de ces contributions : la prise en compte des grandes transformations dans le cadre de la mécanique des milieux continus a été introduite par WEICHERT (1986), qui ramène l'étude de l'adaptation en grandes transformations, à une étude en petites déformations autour d'une position d'équilibre prédéformée ; GROSS-WEERGE (1990) travaille sur une unification des méthodes non linéaires géométriques proposées ; TRITSCH (1993) reformule le théorème de MELAN en se basant sur le formalisme tensoriel des grandes transformations de SIDOROFF (1982) et plus récemment, STUMPF et SCHIECK (2000) se sont préoccupés du problème des grandes rotations.

- *Cas des sollicitations dynamiques*

La généralisation des théorèmes classiques au cas des sollicitations dynamiques, pour lequel le temps retrouve sa véritable signification physique et non pas une simple valeur de paramètre, date des travaux de CERADINI (1969) en ce qui concerne l'approche statique, et de ceux de CORRADI et MAIER (1974) pour ce qui est de l'approche cinématique. Plusieurs autres auteurs, non cités ici, se sont intéressés à ce domaine dans les années quatre-vingt-dix, aux vues de l'application possible de cette méthode à l'ingénierie sismique.

- *Cas de non linéarités matérielles*

Comme précisé par l'hypothèse I.1, les théorèmes classiques ont été énoncés pour des matériaux élastiques parfaitement plastiques. Les années qui suivirent 1936 et l'énoncé de MELAN donnèrent donc lieu à de très nombreuses recherches, visant à analyser l'influence de l'écrouissage, fut il cinématique, isotrope, ou bien combinaison des deux, dont on ne cite ci-après que quelques exemples. MELAN lui-même étendit son théorème deux années plus tard, en 1938, au cas de l'écrouissage cinématique linéaire illimité. Suivirent alors une série de travaux basés sur des modèles à écrouissage illimité. NEAL (1950) reformula le théorème statique dans le cas d'un écrouissage cinématique non linéaire et pour un état de contraintes unidimensionnel. MANDEL *et al.* (1977) travaillèrent sur une condition nécessaire d'adaptation pour des structures élastoplastiques à écrouissage isotrope et cinématique combinés. La prise en compte de l'écrouissage en utilisant le Modèle du Matériau Standard Généralisé de HALPHEN et NGUYEN (1975) a été

proposée par PONTER (1975) et MANDEL (1976). Cependant, PONTER (1975) et KÖNIG (1987) mirent en évidence l'incapacité d'un modèle à écoulement illimité à rendre compte de la ruine d'une structure par déformations plastiques progressives. L'écrouissage cinématique limité a donc été étudié par WEICHERT et GROSS-WEERGE et STEIN *et al.*, qui ont étendu, respectivement en 1988 et 1990, le théorème statique d'adaptation à ce type d'écrouissage. Ne considérant, dans notre étude, que des matériaux élastiques parfaitement plastiques, nous ne donnons pas davantage de références sur le thème de l'écrouissage.

- *Cas des matériaux endommageables*

Contrairement aux extensions précédentes, la prise en compte de l'aspect endommageable des matériaux étudiés ne suscite l'intérêt que depuis les années quatre-vingt. Ce sont WEICHERT et HACHEMI qui se sont intéressés les premiers à ce sujet. On retrouve l'essentiel de leurs recherches dans les travaux suivants : HACHEMI (1994) et WEICHERT et HACHEMI (1998), réalisés entre 1992 et 1998, dans lesquels l'endommagement plastique ductile pris en compte est caractérisé par un paramètre scalaire. Ce premier pas a été suivi de nombreux travaux<sup>6</sup> : FENG et YU (1995) ont étudié l'adaptation des plaques épaisses endommageables ; POLIZZOTTO *et al.* (1996) ont étendu le théorème statique au cas des matériaux élastoplastiques endommageables par l'intermédiaire d'une formulation énergétique et DRUYANOV et ROMAN (2000) se sont intéressés à l'aspect fragile de l'endommagement des matériaux.

- *Cas des modèles non associés*

Le cas de l'adaptation des matériaux présentant une loi d'écoulement non associée, matériaux fréquemment rencontrés en mécanique des sols, a d'abord été étudié par MAIER (1969), puis par PYCKO et MAIER (1995) et BOULBIBANE et WEICHERT (1997). Une nouvelle théorie, basée sur la notion de bipotentiel, représentant physiquement une dissipation, est également développée dans les travaux de DE SAXCÉ *et al.* (2000) et BOUSSHINE *et al.* (2003).

- *Expressions des théorèmes en termes de variables généralisées*

L'utilisation des variables généralisées dans la théorie de l'adaptation a le même objectif que l'utilisation de ces variables dans la théorie de l'élasticité : ramener un problème tridimensionnel complexe à un problème plus simple, plan ou unidimensionnel. En ce sens, l'expression des théorèmes classiques en termes de variables généralisées, afin de traiter des problèmes de type plaque et poutre, est due à KÖNIG (1966), SAWCZUK (1969) et GOKHFELD (1970).

- *Etudes expérimentales de l'adaptation élastoplastique*

Dès les années cinquante, la validation par l'expérience de la théorie de l'adaptation élastoplastique intéressa les chercheurs qui réalisaient alors des expériences dans le cadre des applications de la théorie de la plasticité aux problèmes d'ingénierie. Il ressort de la majeure partie

---

6. Pour de plus amples détails sur le thème de l'adaptation des matériaux endommageables, le lecteur pourra se référer aux travaux de SCHWABE (2000).



des expériences citées ci-après, qu'il existe une très bonne corrélation entre le théorique et l'expérimental. Par exemple, suite à l'étude de portiques soumis à des chargements verticaux et horizontaux cycliques, POPOV et MC CARTHY (1960) ont constaté des erreurs de moins de 10% entre les valeurs théoriques et expérimentales des chargements menant à l'adaptation. De même, les expériences rapportées dans MASSONNET et SAVE (1965) mettent en évidence, d'une part les phénomènes de stabilisation des déformations plastiques et de rupture incrémentale, et d'autre part un chargement à l'adaptation différent du chargement théorique de seulement quelques pourcents. Finalement, les expériences plus récentes de MAHRENHOLTZ *et al.* (1985), SCHEER *et al.* (1990), HUANG et STEIN (1995), et RAKOTOVELO *et al.* (1999) aboutissent à la même conclusion d'un très faible décalage entre résultats théoriques et expérimentaux.

- *Etudes aux états limites des matériaux hétérogènes*

Cette catégorie d'extensions étant très étroitement reliée à notre sujet d'étude, il est plus approprié de la détailler en introduction du chapitre III (paragraphe III.1), consacré à l'étude des matériaux inhomogènes soumis à des chargements variables.

On remarque donc au travers des nombreuses extensions citées ci-dessus, que cette branche particulière de la plasticité qu'est la théorie de l'adaptation élastoplastique, a fait l'objet de très nombreux développements théoriques au cours des soixante-dix dernières années, bien qu'elle ne fut "officiellement" reconnue par la communauté scientifique qu'il y a environ trois décennies. Cet enthousiasme a néanmoins été un peu plus retenu en ce qui concerne les développements numériques liés aux calculs des chargements à l'adaptation, même si le développement simultané des méthodes numériques pour la mécanique les a grandement favorisés.

### I.1.5 Traitements numériques de la théorie de l'adaptation

Le développement des méthodes de discrétisation numérique –en particulier la méthode des éléments finis en déplacements– mais également le développement de la programmation mathématique qui sera traité au paragraphe suivant, ont effectivement permis de nombreux progrès dans le domaine de l'adaptation et de l'analyse limite, en calculant des états limites de structures de plus en plus complexes, sans pour autant avoir besoin de passer par l'étape expérimentale, souvent longue<sup>7</sup> et coûteuse. Cette nécessité de disposer de méthodes numériques performantes afin de mener à bien un calcul aux états limites, provient du fait que la théorie de l'adaptation, comme la théorie de l'analyse limite, conduit à résoudre un problème d'optimisation linéaire ou non linéaire, sous contraintes elles-mêmes linéaires ou non linéaires (cf. Chapitre III). L'objectif de ce paragraphe est donc de présenter les deux grandes classes de méthodes permettant de traiter un problème aux états limites, toutes deux basées sur le théorème de KÖNIG et KLEIBER (1978), qui, moyennant la connaissance du domaine de variations des chargements évoqué au

---

7. Ne pas croire pour autant que les simulations numériques soient toutes, par nature, de durée raisonnable ...

paragraphe I.1.2, stipule ceci :

**THÉORÈME I.1**

Soit  $\mathcal{D}$  un polyèdre convexe de chargements, appelé *domaine de chargements*. Si une structure s'adapte sous un trajet de chargements passant par les sommets de  $\mathcal{D}$ , alors elle s'adapte pour tout cycle de chargements inclus dans ce domaine de chargements.

**I.1.5.a Approche incrémentale**

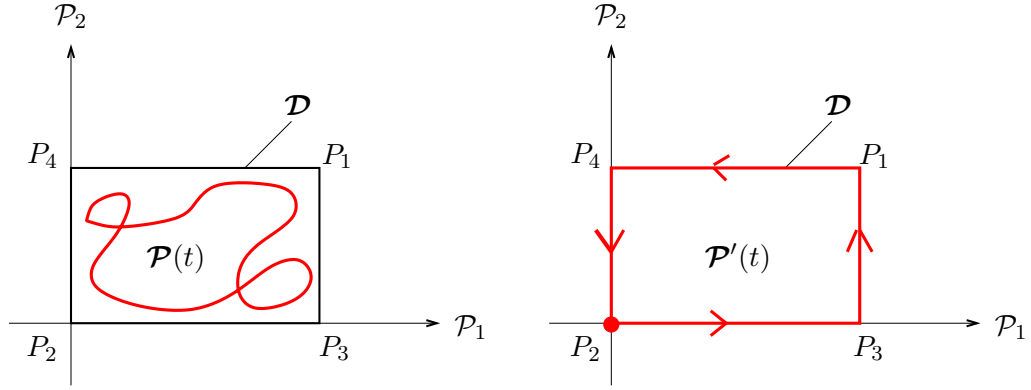


FIGURE I.3 – *Domaine et trajet de chargements*

Bien que l'intérêt principal des théories de l'adaptation et de l'analyse limite réside dans le fait que ce sont des méthodes directes, elle furent en premier lieu traitées d'une façon incrémentale, sur la base du théorème I.1. En effet, si l'on considère le domaine  $\mathcal{D}$  de la figure I.3, bornant les variations des chargements dans l'espace des charges  $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ , alors pour assurer qu'il y a adaptation pour tout chargement  $\mathcal{P}(t)$  du domaine  $\mathcal{D}$ , il suffit d'assurer qu'il y a adaptation pour un trajet de chargements  $\mathcal{P}(t)$  vérifiant :

$$\exists t_i \quad \mathcal{P}(t_i) = P_i \quad \forall i = 1..4 \quad (\text{I.4})$$

C'est donc avec le trajet, défini sur un cycle par (I.5) et représenté figure I.3, que travaillent les auteurs utilisant une approche incrémentale, puisqu'il est le trajet satisfaisant (I.4) le plus simple à mettre en oeuvre numériquement.

$$\mathcal{P}'(t) = \begin{cases} (\mathcal{P}_1(t), 0) & \text{pour } t \in [t_1, t_2] \\ (\mathcal{P}_1(t_2), \mathcal{P}_2(t)) & \text{pour } t \in [t_2, t_3] \\ (\mathcal{P}_1(t), \mathcal{P}_2(t_3)) & \text{pour } t \in [t_3, t_4] \\ (0, \mathcal{P}_2(t)) & \text{pour } t \in [t_4, t_5] \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

BORKOWSKI et KEIBER (1980), KLEIBER et KÖNIG (1984) et HYDE *et al.* (1985) et plus récemment GOH *et al.* (2003) ont donc étudié le comportement de structures grâce à des analyses élastoplastiques incrémentales. Ce type d'analyse présente cependant les inconvénients majeurs

suivants, risquant, comme dans toute méthode incrémentale, d'alimenter le phénomène d'accumulation d'erreurs numériques :

- il est nécessaire de décrire exactement l'histoire du chargement, comme précisé par (I.5),
- il faut vérifier à chaque pas si les contraintes résiduelles tendent vers un champ constant par rapport au temps, afin de pouvoir déterminer l'incrément de passage à l'adaptation, ou bien encore, il faut être capable de déterminer l'incrément à partir duquel il y a stabilisation de l'énergie dissipée plastiquement,
- il faut, en général, un très grand nombre de cycles, non quantifiable *a priori*, avant que cette stabilisation n'apparaisse.

#### I.1.5.b Approche directe

Une façon de remédier à ces inconvénients, inhérents aux méthodes incrémentales, est d'avoir recours aux méthodes directes qui estiment, comme leur nom l'indique, directement la quantité recherchée, tout en ne nécessitant aucun autre renseignement sur le chargement que son domaine de variations. Cette approche est basée sur les théorèmes classiques de l'adaptation (ou étendus, suivant la nature des matériaux étudiés, ainsi que les phénomènes voulant être mis en évidence) et permet d'évaluer directement le coefficient de sécurité par rapport à la non-adaptation, c'est-à-dire d'évaluer le chargement au dessus duquel il n'y aura pas adaptation. Les toutes premières études utilisèrent des discrétisations par éléments finis et des algorithmes d'optimisation linéaire, pour aboutir, au fil des évolutions technologiques et mathématiques, à l'introduction d'éléments tridimensionnels et d'algorithmes d'optimisation non linéaire.

On retrouve donc les études de BELYSCHKO (1972), NGUYEN-DANG et PALGEN (1979) et GROSS-WEEGE et WEICHERT (1987), dont l'objectif est d'implémenter numériquement le théorème statique de MELAN pour des problèmes en contraintes planes. Cette même approche statique a été implémentée par MORELLE et NGUYEN-DANG (1983) et GROSS-WEEGE (1988) pour des problèmes de coques axisymétriques. Des travaux équivalents, portant sur des problèmes aux contraintes planes et sur des problèmes de coques de révolution, ont été traités numériquement d'un point de vue cinématique respectivement par CORRADI et ZAVELANI (1974) et par KARADENIZ et PONTER (1984) et MORELLE (1986). Toutes ces recherches ont donc contribué à la mise en place de méthodes numériques permettant d'évaluer directement le coefficient de sécurité contre la non-adaptation.

Cependant, il est à noter qu'elles concernent essentiellement des problèmes bidimensionnels, représentant des structures assez simples. L'adaptation de structures tridimensionnelles, plus complexes, est en effet moins répandue et hormis quelques études, telles celles listées ci-après, peu d'auteurs s'y sont encore intéressés : FENG et LIU (1996) ont étudié l'adaptation de structures 3D à écrouissage cinématique, PONTER et CHEN (2001) ont développé une méthode pour évaluer le chargement à l'adaptation et le chargement limite de structures 3D et KHALIJ *et al.* (2002) se

sont intéressés à l'adaptation de structures 3D sous chargements cycliques radiaux. Ce manque d'intérêt n'est assurément pas lié à un manque de curiosité scientifique, mais provient simplement du fait que les théories basées sur des approches directes mènent à des problèmes d'optimisation, qui deviennent vite très lourds numériquement, dès que l'on souhaite traiter des problèmes autres qu'unidimensionnels. De plus, si l'on considère des matériaux présentant une surface d'écoulement non linéaire, la résolution du problème d'optimisation non linéaire associé nécessite de nombreuses itérations et engendre donc des temps de calculs très volumineux. Étudier les états limites de structures tridimensionnelles, à partir d'approches directes, telles l'adaptation ou l'analyse limite, relève donc encore du domaine de la recherche, avec pour principal objectif le développement de méthodes numériques performantes, tant en termes de fiabilité que de temps de calculs.

## I.2 La programmation mathématique, un outil pour l'adaptation

Comme évoqué précédemment, la résolution par une approche directe d'un problème d'adaptation, se rapporte, entre autres, à la résolution d'un problème d'optimisation. C'est MAIER qui, le premier, fut à l'origine de cette constatation, en précisant, suite à ses études sur des problèmes discrétisés (MAIER, 1972), qu'un problème d'adaptation (et d'analyse limite en tant que cas particulier) pouvait être traité grâce aux méthodes de la programmation mathématique. Cette branche particulière des mathématiques appliquées est donc devenue, à partir de ce constat, la théorie de base des auteurs désireux de développer des algorithmes capables de traiter des problèmes d'adaptation toujours plus conséquents. On présente donc, dans ce paragraphe, un bref historique de cette théorie, afin de mettre en évidence son interaction avec les théories de calculs aux états limites.

### I.2.1 Bref historique de la programmation mathématique

Plus précisément, un problème aux états limites, se traduit soit par un problème de maximisation, si l'étude est abordée d'un point de vue statique (utilisation du théorème de MELAN), soit par un problème de minimisation, si l'étude est abordée d'un point de vue cinématique (utilisation du théorème de KOITER). Les problèmes qui nous intéressent mèneront donc toujours à maximiser ou à minimiser des fonctionnelles convexes (essentiellement grâce au caractère associé des modèles considérés) sur un domaine défini par des contraintes d'égalités et d'inégalités. Or, pour pouvoir étudier des structures complexes, il est nécessaire d'avoir recours aux méthodes numériques, et en particulier d'utiliser des méthodes de discrétisation, comme évoqué au paragraphe I.1.5. Ces discrétisations transforment alors un problème d'optimisation dans un espace fonctionnel, en un problème d'optimisation dans un espace vectoriel de dimension finie. Dans ce cas, la fonction à optimiser est appelée *fonction objectif*, et les contraintes : *contraintes d'optimisation*. C'est à ce titre que la programmation mathématique intervient dans notre étude, puisque son objectif est, selon la définition de MINOUX (1983), d'étudier théoriquement les problèmes d'optimisation ainsi que la conception et la mise en œuvre des algorithmes de résolution. Deux

aspects fondamentaux transparaissent de cette définition :

- l’aspect théorique, qui permet de fournir un cadre de travail représentatif des problèmes à traiter,
- et l’aspect algorithmique, dont l’objectif est d’offrir des méthodes de résolution pour les problèmes d’optimisation, adaptées en fonction des spécificités inhérentes à ces problèmes.

Cette théorie est donc d’importance dans bon nombre d’applications, telles la recherche opérationnelle, l’analyse numérique, l’automatique, l’économie mathématique ou encore l’ingénierie. C’est évidemment ce dernier domaine d’application qui retient notre attention, puisqu’il permet, entre autres, de se concentrer sur des problèmes de dimensionnement et d’optimisation de structures.

Le terme de *programmation linéaire* est proposé dès 1949 par DANTZIG, alors qu’il étudie des problèmes d’optimisation de fonctions linéaires sous contraintes linéaires, d’un point de vue théorique et algorithmique. Dans la continuité de ses travaux, il propose en 1951 un algorithme de résolution, qu’il appellera *algorithme du simplexe*, afin de résoudre des problèmes linéaires, tant au niveau de la fonction à optimiser qu’au niveau des contraintes d’optimisation. A la même époque, KUHN et TUCKER (1951) posent les fondements théoriques de l’optimisation non linéaire, permettant de traiter des problèmes d’optimisation non linéaire, avec ou sans contraintes. Cependant, la mise en place d’algorithmes traduisant cette théorie, ne fut pas immédiatement consécutive. En effet, ce n’est que dix années plus tard, que ROSEN développa le premier algorithme d’optimisation non linéaire efficace, d’abord dans le cas de contraintes d’optimisation linéaires (ROSEN, 1960), puis dans le cas de contraintes d’optimisation non linéaires (ROSEN, 1961). La principale différence entre un algorithme de programmation linéaire et un algorithme de programmation non linéaire, est que le premier fournit toujours une solution optimale globale. Le second, quant à lui, converge en général vers l’une des multiples solutions optimales, mais locales, en fonction des valeurs initiales que l’on a assigné aux variables d’optimisation. Cependant, KUHN et TUCKER (1951) ont donné des conditions suffisantes, permettant de vérifier l’aspect local ou global de la solution trouvée, et basées sur des considérations de convexité des fonctions et ensembles de définition intervenant dans le problème d’optimisation non linéaire.

Les algorithmes de résolution des problèmes d’optimisation sans contraintes sont, en général, itératifs et basés sur une technique de descente, que l’on explicitera au paragraphe I.2.2. Concernant les problèmes d’optimisation avec contraintes, le principe de base est de se ramener à un problème d’optimisation sans contraintes. Pour ce faire, DAVIES et SWANN (1969) ont distingué deux grandes classes de méthodes<sup>8</sup> :

- les méthodes basées sur une modification de la fonction à optimiser. Elles définissent en fait une nouvelle fonction objectif, appelée *fonction de pénalité simple* qui prend en compte

---

8. L’algorithme de résolution utilisé dans notre étude relevant de la première de ces deux classes, nous ne donnerons pas d’informations plus précises sur la deuxième.

les contraintes d'optimisation, afin de se ramener à une suite de problèmes d'optimisation sans contraintes,

- les méthodes qui agissent, non pas sur la fonction objectif, mais directement sur la méthode de recherche de la solution optimale.

C'est COURANT (1943) qui mit en place le formalisme des fonctions de pénalité pour la programmation non linéaire. Cependant, MURRAY a montré en 1967 que les méthodes numériques associées à ces fonctions de pénalité simple étaient mal conditionnées, et pouvaient par conséquent présenter des instabilités numériques. Ces méthodes ont donc été abandonnées au profit des méthodes de *Lagrangiens augmentés* et de *fonctions de pénalités exactes*, qui sont des fonctions dont les maxima sans contraintes (ou les minima suivant le type d'approche observé) sont les solutions optimales du problème initial avec contraintes. Les années soixante-dix ont donc vu de nombreuses contributions visant à mettre en place puis à améliorer les méthodes de programmation non linéaire basées sur des techniques de Lagrangien augmenté et de multiplicateurs de Lagrange, ce qui favorisa l'utilisation d'approches directes pour des calculs aux états limites. Les premières contributions majeures dans le domaine de l'optimisation convexe sous contraintes, abordée par la méthode du Lagrangien augmenté, furent celles de HESTENES (1969) et POWELL (1969), qui ont proposé une méthode de résolution pour des problèmes à contraintes d'égalités linéaires, par l'intermédiaire d'algorithmes assurant la stabilité numérique, contrairement aux méthodes de pénalités simples. Cette méthode fut ensuite améliorée et étendue par les travaux de FLETCHER et LILL (1971), dans lesquels est évoqué le cas des contraintes d'inégalités. Ce dernier cas fut plus amplement étudié par ROCKAFELLAR (1971) qui introduisit un Lagrangien augmenté pour des problèmes d'optimisation avec contraintes d'inégalités. PIERRE (1971) et LOWE (1974) ont ensuite proposé des algorithmes permettant de traiter à la fois des contraintes d'égalités et d'inégalités. A partir de ces fondations théoriques et algorithmiques, de nombreuses améliorations ont été apportées, et continuent de l'être, à la méthode du Lagrangien augmenté, et plus généralement, aux méthodes d'optimisation non linéaire, afin de développer et de mettre en oeuvre numériquement des algorithmes capables de résoudre des problèmes d'optimisation de plus ou moins grande taille.

L'algorithme utilisé pour résoudre nos problèmes d'optimisation, dérivés de nos problèmes d'adaptation, est un algorithme reposant sur la méthode du Lagrangien augmenté. Par conséquent, on ne prétend aucunement présenter ici en détail l'historique de toutes les méthodes de résolution d'un problème d'optimisation, méthodes issues de la généralisation des fondements évoqués ci-avant. On souhaite cependant donner un aperçu des méthodes existantes, afin d'expliquer au mieux l'origine et l'intérêt des méthodes utilisées par notre algorithme d'optimisation.

### I.2.2 Classification des problèmes d'optimisation et méthodes de résolution associées

Pour ce faire, on fournit donc au lecteur une vue générale<sup>9</sup> des différentes classes de méthodes existantes, en fonction des deux principales classes de problèmes d'optimisation existants : les problèmes d'optimisation sans contraintes et les problèmes d'optimisation avec (ou sous) contraintes. Dans ce qui suit, que le problème soit sans ou avec contraintes, la fonction à optimiser sera supposée deux fois continûment différentiable.

#### I.2.2.a Problèmes d'optimisation sans contraintes

Il existe deux types de méthodes pour aborder cette classe de problèmes : les méthodes déterministes et les méthodes stochastiques. Dans les deux cas, le problème à résoudre reste le même<sup>10</sup>, à savoir :

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \quad (\text{I.6})$$

où  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction supposée régulière ( $n \geq 1$ ) et où  $\mathbf{x}$  est un élément de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ . Les méthodes déterministes possèdent la propriété –sous réserve que les conditions de convergence soient satisfaites– de toujours converger de la même façon vers la solution du problème d'optimisation, sous des conditions initiales identiques. Par contre, la solution est souvent locale, c'est-à-dire que la plupart de ces méthodes convergent vers l'optimum le plus proche de la donnée initiale, sans qu'il corresponde forcément à l'optimum global du problème. Ces méthodes sont donc fortement dépendantes du point de départ de l'algorithme qui leur est associé, mais restent cependant assez efficaces et surtout peu coûteuses en terme de nombre d'itérations nécessaires à la convergence. Les méthodes stochastiques présentent, quant-à-elles, un caractère aléatoire, mais possèdent les avantages de ne requérir ni la donnée de conditions initiales (point de départ de l'algorithme), ni la connaissance du gradient de la fonction objectif, et de converger, en général, vers la solution globale du problème. Ces méthodes restent cependant plus coûteuses en terme de nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence et ne seront pas détaillées ici. Revenons donc sur les méthodes déterministes, qui sont celles utilisées par les algorithmes du logiciel d'optimisation que nous utiliserons plus loin. Elles sont elles-mêmes scindées en deux sous catégories : les méthodes déterministes unidimensionnelles, pour lesquelles la fonction objectif ne dépend que d'une seule variable, et les méthodes déterministes multidimensionnelles, pour lesquelles la fonction objectif peut dépendre de plusieurs variables.

##### ■ Méthodes unidimensionnelles ( $n = 1$ )

On distingue plusieurs types de méthodes unidimensionnelles, dont les plus répandues sont

---

9. On ne fournit ici que les éléments nécessaires à la compréhension des algorithmes utilisés dans notre étude. Pour de plus amples détails sur chacune des méthodes, le lecteur pourra se référer aux ouvrages suivants : MORÉ (1983), CALDORA COSTA (2001), FRÉDÉRIC BONNANS *et al.* (2003).

10. Le problème est ici énoncé sous la forme d'une minimisation. Le cas d'une maximisation se traite cependant exactement de la même façon, en substituant  $-f$  à  $f$ .

la *Méthode de Dichotomie* et la *Méthode de la Section Dorée*. Celles-ci, et toutes les autres, permettent de localiser l'optimum d'une fonction en réalisant des réductions successives de l'intervalle de recherche dudit optimum. Quels que soient la méthode de réduction et le critère d'arrêt utilisés, le principe de ces méthodes reste toujours le même : à chaque itération, l'intervalle de recherche est réduit, pour finir par devenir plus petit qu'un certain petit paramètre  $\varepsilon$  fixé initialement. Dans le cas où la fonction objectif est différentiable, son gradient est alors utilisé pour accélérer le processus de recherche des points intermédiaires permettant de réduire l'intervalle.

### ■ Méthodes multidimensionnelles ( $n \geq 1$ )

Les méthodes multidimensionnelles disposent de deux grandes classes<sup>11</sup> d'algorithmes : les algorithmes reposant sur des *Méthodes à direction de descente* (relativement à un problème de minimisation) et ceux reposant sur des *Méthodes à région de confiance*.

Comme leur nom l'indique, les méthodes à direction de descente sont basées sur le choix d'une direction selon laquelle la fonction à minimiser<sup>12</sup> va décroître. Cette direction est alors appelée *direction de descente*. Le principe de ces méthodes est de construire par récurrence (I.7) une suite d'itérés  $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \geq 1}$  qui approche une solution  $\mathbf{x}^*$  du problème :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} \quad (\text{I.7})$$

Dans cette équation,  $\mathbf{d}^{(k)}$  représente la direction de descente de la méthode et  $\alpha^{(k)}$  son pas ( $\alpha^{(k)}$  doit toujours être supérieur à zéro). Pour définir entièrement une méthode à direction de descente, il faut alors préciser :

- la direction de descente  $\mathbf{d}^{(k)}$  choisie, ce qui donne son nom à l'algorithme,
- la façon de déterminer le pas  $\alpha^{(k)}$  dans la direction  $\mathbf{d}^{(k)}$ , ce qui relève alors de la recherche linéaire.

De manière générale, les directions de recherche peuvent être données soit par le gradient de la fonction objectif (et dans ce cas, on parle effectivement de méthodes analytiques dites de *descente*), soit par explorations successives de l'espace, afin de trouver la direction de recherche la plus favorable, sans nécessairement avoir besoin de connaître le gradient de la fonction objectif (ces méthodes sont dites *géométriques*). Les méthodes de descentes les plus utilisées sont la "Méthode de la Plus Grande Pente" initialement proposée par CAUCHY (1847), la "Méthode du Gradient Conjugué" (HESTENES et STIEFEL, 1952) et la "Méthode de Quasi-Newton", qui sont basées sur la connaissance du gradient de la fonction objectif, ainsi que la "Méthode de Powell" (POWELL, 1965), qui choisit ses directions de descente

11. Ces deux grandes classes sont opposées dans la littérature, bien que la deuxième utilise certaines notions de la première.

12. On rappelle que le terme minimiser peut être compris comme "maximiser" en substituant  $-f$  à  $f$ . Cependant, la notion de direction de **descente** étant relative à une minimisation, on préférera, dans le discours, le terme de minimisation.



sans avoir connaissance du gradient de cette fonction. Cette absence de renseignements sur le comportement de la fonction objectif, implique des choix de directions souvent non optimales vis-à-vis de la convergence et rend donc la méthode plus lente et les calculs plus lourds par rapport aux méthodes basées sur la connaissance du gradient, mais présente quand même l'avantage de ne requérir aucune propriété de différentiabilité de ladite fonction objectif.

Concurrentes des méthodes à direction de descente, les méthodes à région de confiance, qui sont celles implémentées dans l'algorithme que nous utiliserons plus tard, permettent de forcer la convergence des itérés lorsque le départ de l'algorithme se fait loin de la solution recherchée. Ces méthodes possèdent des résultats de convergence plus forts que ceux de la première grande classe de méthodes multidimensionnelles, pour des hypothèses pourtant plus faibles. Permettant de résoudre des problèmes plus complexes, par exemple des problèmes moins bien conditionnés, les spécialistes de l'optimisation s'accordent à dire qu'elles restent cependant plus difficiles à mettre en oeuvre. L'idée de base de cette deuxième classe de méthodes est d'approximer, à chaque itération, la fonction objectif  $f$  à l'aide d'une fonction plus simple  $h^{(k)}$ , qui reflète le comportement de  $f$  dans un voisinage  $V^{(k)}$  du point courant  $\mathbf{x}^{(k)}$ . Ce voisinage est appelé *région de confiance* et est défini comme suit :

$$V^{(k)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\|_2 \leq r^{(k)}\} \quad (\text{I.8})$$

Dans cette expression (I.8),  $r^{(k)}$  est le *rayon de confiance* ( $r^{(k)} > 0$ ) et la norme  $\|\dots\|_2$  est associée au produit scalaire euclidien  $\langle \dots \rangle$  tel que :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_i u_i v_i \quad (\text{I.9})$$

Le modèle choisi pour représenter les variations de  $f$  dans ce voisinage et pour un incrément  $\mathbf{s}$  de  $\mathbf{x}^{(k)}$ , est souvent un modèle quadratique :

$$h(\mathbf{s}) = \nabla^T f(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{s} \quad (\text{I.10})$$

Dans le cas, qui sera le nôtre, où la matrice  $\mathbf{M}^{(k)}$  correspond au hessien de  $f$  en  $\mathbf{x}^{(k)}$ , c'est-à-dire quand :

$$\mathbf{M}^{(k)} = \nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (\text{I.11})$$

alors on a :

$$f(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}) = f(\mathbf{x}^{(k)}) + h(\mathbf{s}) + o(\mathbf{s}^2) \quad (\text{I.12})$$

si bien que, d'après le développement de TAYLOR, le modèle quadratique choisi est légitime pour des valeurs de l'incrément  $\mathbf{s}$  voisines de zéro. Une fois ce modèle défini et évalué, il faut résoudre le sous-problème suivant :

$$\min_{\mathbf{s} \leq r^{(k)}} h^{(k)}(\mathbf{s}) \quad (\text{I.13})$$

Cette résolution est réalisée par l'intermédiaire de la règle de *Cauchy*, qui permet de trouver le minimum<sup>13</sup> de  $h^{(k)}$  dans la région de confiance et le long de la droite de plus forte pente de  $h^{(k)}$ , qui est également la droite de plus grande pente de  $f$ , sous réserve de la validité de l'approximation des variations de  $f$  par  $h^{(k)}$  dans le voisinage  $V^{(k)}$ . Cette méthode se rapproche donc d'une des méthodes à direction de descente évoquées plus haut : la méthode de la plus grande pente. En effet, le point de CAUCHY est estimé en résolvant le problème suivant :

$$\begin{cases} \min h^{(k)}(\mathbf{s}) \\ \mathbf{s} \leq r^{(k)} \\ \mathbf{s} = -\alpha \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

Reste ensuite à évaluer la qualité de la solution  $\mathbf{s}^{(k)}$  trouvée, afin d'ajuster, ou non, le rayon de confiance. En effet, si la solution  $\mathbf{s}^{(k)}$  du sous-problème est un incrément permettant de diminuer significativement la valeur de  $f$  en  $\mathbf{x}^{(k)}$ , alors l'itéré suivant vaut :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)} \quad (\text{I.15})$$

Dans le cas contraire, le rayon de confiance  $r^{(k)}$  est alors diminué et le sous-problème est résolu une nouvelle fois avec ce nouveau rayon, et ainsi de suite jusqu'à acceptation de la solution  $\mathbf{s}^{(k)}$  (l'objectif de ce paragraphe étant de présenter, dans les grandes lignes, les méthodes à région de confiance, et non pas de les décrire de façon précise, les tests d'arrêt ne seront pas détaillés ici). Une fois cette solution acceptée, le modèle est mis à jour au point  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  afin de procéder à la  $k + 1^{\text{ème}}$  itération. Les étapes de cette mise à jour sont les suivantes :

- calcul du point  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  tel que  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)}$ ,
- calcul du gradient  $\nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)})$  en  $\mathbf{x}^{(k+1)}$ ,
- calcul du hessien  $\nabla^2 f(\mathbf{x}^{(k+1)})$  en  $\mathbf{x}^{(k+1)}$ ,
- calcul du nouveau rayon de confiance  $r^{(k+1)}$  : la mise à jour de ce rayon est faite grâce à une comparaison entre la décroissance réelle de  $f$  entre  $\mathbf{x}^k$  et  $\mathbf{x}^{(k+1)}$ , et celle prédite par le modèle quadratique, *id est*  $-h^{(k)}(\mathbf{s}^{(k)})$ .

Après nous être intéressés au cas des problèmes d'optimisation sans contraintes en présentant diverses méthodes permettant de les résoudre, avec un accent particulier sur les méthodes qui seront utilisées dans la suite de notre étude : les méthodes à région de confiance, considérons désormais les problèmes d'optimisation avec contraintes, qui correspondent aux problèmes que nous traiterons, consécutifs à l'utilisation de la théorie de l'adaptation. Par souci de cohérence dans la présentation, on continue de raisonner sur un problème de minimisation, tout en ayant à l'esprit l'équivalent en maximisation.

---

13. Ce minimum est appelé *Point de Cauchy*.

### I.2.2.b Problèmes d'optimisation avec contraintes

Le problème à résoudre peut, cette fois-ci, être soumis à deux types de contraintes : des contraintes d'égalités et des contraintes d'inégalités. Afin de présenter les principes d'une façon que l'on souhaite la plus générale possible, chacun de ces deux types est pris en compte dans ce qui suit : les contraintes d'égalités seront représentées par les fonctions  $a_i$  et les contraintes d'inégalités par les fonctions  $b_j$ . Un problème d'optimisation avec contraintes s'énonce donc généralement comme suit :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \\ a_i(\mathbf{x}) = 0 & i = 1..p \\ b_j(\mathbf{x}) \leq 0 & j = 1..q \end{cases} \quad (\text{I.16})$$

où :

- le vecteur  $\mathbf{x}$  est toujours un élément de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ ,
- $i, j, r, p, q, n$  sont des entiers naturels,
- la fonction objectif  $f$ , les contraintes d'égalités  $a_i$  et les contraintes d'inégalités  $b_i$  peuvent être des fonctions linéaires ou non.

Tout comme précédemment, il existe plusieurs méthodes pour résoudre un problème d'optimisation avec contraintes, que l'on peut regrouper en deux grandes catégories : les *Méthodes Primitives ou Directes* et les *Méthodes Duales ou de Transformation*. Les méthodes primales agissent directement sur le problème initial (primal), sans le modifier. Elles engendrent alors une suite de sous-problèmes et une séquence de solutions associées. Elles possèdent donc l'avantage de procurer, à chaque itération, une solution de plus en plus approchée. Elles sont par contre difficiles à mettre au point et possèdent rarement des propriétés de convergence globale. Par exemple, dans le cas de contraintes linéaires, l'une des méthodes est celle du *gradient projeté* (ROSEN, 1960), qui consiste à adapter les méthodes à direction de descente, en agissant sur la choix de la direction de descente, afin de les rendre valables dans le cas de problèmes sous contraintes. De même, lorsque les contraintes et/ou la fonction objectif sont non linéaires, on peut citer la *Méthode du gradient réduit généralisé*, introduite par ABADIE et CARPENTIER (1969). C'est cependant sur la deuxième classe de méthode que nous allons porter notre attention. En effet, ce sont ces méthodes de transformation qui sont utilisées dans les algorithmes de notre logiciel d'optimisation. Elles se scindent encore une fois en trois sous-catégories : les *Méthodes de pénalités*, les *Méthodes lagrangiennes classiques* et la *Méthode du Lagrangien augmenté*. Ces trois sous-catégories possèdent le point commun d'agir sur le problème initial, afin de ramener son étude à celle d'une suite de problèmes d'optimisation sans contraintes, dont les principaux algorithmes ont été présentés au paragraphe précédent I.2.2.a.

#### ■ Méthodes de pénalités

Les méthodes de pénalités, initialement proposées par COURANT (1943), consistent à intégrer les fonctions contraintes dans la fonction objectif, tout en leur associant une pénalité

d'autant plus importante que l'on se rapproche de la solution (c'est-à-dire que plus la valeur de  $r$  est grande dans (I.17), moins la contrainte est violée). La fonction pénalisée à minimiser peut devenir par exemple :

$$f(\mathbf{x}) + r \sum_i [c_i(\mathbf{x})]^2 \quad (\text{I.17})$$

où  $c_i$  englobe toutes les contraintes<sup>14</sup> et où  $r$  est le *coefficient de pénalité*. Le problème est alors ramené à un problème d'optimisation sans contraintes, qui est résolu par l'un des algorithmes présentés précédemment. Ces méthodes sont en générales faciles à mettre en oeuvre, mais nécessitent, pour être efficaces, des coefficients de pénalités très grands, ce qui influe négativement sur leur vitesse de convergence.

#### ■ Méthodes lagrangiennes classiques

Ces méthodes sont basées sur le même principe que les précédentes, à savoir : remplacer le problème initial par un problème dual constitué d'une suite de sous-problèmes résolus par des méthodes d'optimisation unidimensionnelle. La fonction objectif du problème dual est dans ce cas la *fonction de Lagrange* :

$$L(\mathbf{x}, \lambda, \gamma) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^q \gamma_j b_j(\mathbf{x}) \quad (\text{I.18})$$

où les coefficients  $\lambda_i$  et  $\gamma_j$  sont les *multiplicateurs de Lagrange*. L'utilisation de cette fonction est issue des recherches de KUHN et TUCKER (1951) qui ont énoncé des conditions nécessaires d'optimalité, conditions qui dans le cas de fonctions (objectif et de contraintes) convexes et continûment différentiables –propriétés que posséderont les fonctions de notre étude– deviennent alors des conditions nécessaires et suffisantes, exprimées par l'intermédiaire du théorème suivant :

#### THÉORÈME I.2

Un point  $\mathbf{x}^*$  est un optimum global du problème d'optimisation sous contraintes (I.16)

$\Leftrightarrow \exists \quad \boldsymbol{\lambda}^*$  et  $\boldsymbol{\gamma}^*$  tels que :

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\gamma}^*) = \mathbf{0} \\ \gamma_j b_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \forall j = 1..q \end{cases}$$

où les  $\lambda_i^*$  doivent être positifs ou nuls.

Cependant, il a été montré que l'utilisation de cette fonction de Lagrange posait problème, en particulier dans le cas où les fonctions intervenant dans l'étude étaient non convexes. Certains auteurs ont donc cherché à l'améliorer et ont ainsi développé la méthode du

14. Une contrainte d'égalités peut être vue comme la réunion de deux contraintes d'inégalités de signe contraire, de même qu'une contrainte d'inégalités peut être vue comme une contrainte d'égalités grâce à l'introduction de variables d'écart définies ci-après.

Lagrangien augmenté, en rajoutant des termes de pénalités à la fonction de Lagrange classique. Cette méthode, implémentée dans le logiciel d'optimisation que nous utiliserons, est présentée ci-après.

■ *Méthodes du Lagrangien augmenté*

En effet, comme évoqué au paragraphe I.2.1, la méthode dite du Lagrangien augmenté a été introduite dans le but de remédier aux insuffisances des méthodes de pénalités et des méthodes lagrangiennes classiques. HESTENES (1969) et POWELL (1969) ont traité le cas des contraintes d'égalités, puis la méthode a été généralisée au cas des contraintes d'inégalités par ROCKAFELLAR (1973). La démarche de HESTENES et de POWELL consiste à remplacer le problème (I.16), dans lequel seules les contraintes  $a_i$  sont considérées, par une suite de problèmes sans contraintes minimisant la fonction Lagrangien augmenté suivante :

$$L_a(\mathbf{x}, \lambda, r) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i(\mathbf{x}) + r \sum_{i=1}^p [a_i(\mathbf{x})]^2 \quad (\text{I.19})$$

où :

- les  $\lambda_i$  sont les multiplicateurs de Lagrange de signe quelconque,
- $r > 0$  est un coefficient de pénalité (utilisé, à l'origine, par les méthodes de pénalités).

Pour traiter le cas des contraintes d'inégalités, où seules les fonctions  $b_j$  sont considérées dans le problème (I.16), ROCKAFELLAR a introduit des variables appelées *variables d'écart*, permettant de considérer les contraintes d'inégalités comme des contraintes d'égalités. Ce détail est explicité ici car cette notion de variable d'écart est présente dans l'algorithme d'optimisation que nous utiliserons. En notant  $s_j$  ( $s_j \geq 0$ ) la variable d'écart associée à l'inégalité  $b_j$ , on obtient alors le problème suivant :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \\ b_j(\mathbf{x}) + s_j = 0 \quad j = 1..q \\ s_j \geq 0 \end{cases} \quad (\text{I.20})$$

La fonction Lagrangien augmenté associée au problème (I.20) devient alors :

$$L_a(\mathbf{x}, \lambda, r) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^q \lambda_j (b_j(\mathbf{x}) + s_j) + r \sum_{j=1}^q [b_j(\mathbf{x}) + s_j]^2 \quad (\text{I.21})$$

Il existe également d'autres types de Lagrangiens augmentés, mais c'est sur celui-ci qu'il est le plus facile de comprendre son intérêt, comme nous allons le voir au paragraphe suivant, en utilisant les conditions nécessaires d'optimalité pour des problèmes d'optimisation, sans et avec contraintes.

### I.2.3 Utilité du Lagrangien augmenté

En effet, l'objectif de ce paragraphe est de mettre en lumière l'intérêt de la fonction Lagrangien augmenté. Pour simplifier la présentation, on utilise l'artefact des variables d'écart, afin de transformer une contrainte d'inégalité en une contrainte d'égalité, et donc d'écrire tout problème d'optimisation sous contraintes de la façon générale suivante :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \\ c_i(\mathbf{x}) = 0 \quad i = 1..l \end{cases} \quad (\text{I.22})$$

dans lequel toutes les contraintes, qu'elles soient d'égalités ou d'inégalités, sont regroupées sous le terme générique  $c_i$ . La fonction Lagrangien augmenté associée devient donc dans ce cas :

$$L_a(\mathbf{x}, \lambda, r) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l \lambda_i c_i(\mathbf{x}) + r \sum_{i=1}^l [c_i(\mathbf{x})]^2 \quad (\text{I.23})$$

C'est en raisonnant sur cette fonction, ainsi que sur les conditions exposées dans le théorème (I.2), que l'on peut comprendre l'intérêt du Lagrangien augmenté par rapport aux méthodes de pénalités. En effet, si l'on se place au point optimum  $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ , alors, grâce aux conditions de KUHN et TUCKER, le gradient du Lagrangien augmenté  $L_a$  est nul quelle que soit la valeur du coefficient de pénalité  $r$ , alors qu'en ce même point, le gradient de la fonction de pénalité (I.17) vaut  $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}^*)$ , généralement différent de zéro quelle que soit la valeur de  $r$ . Afin d'approcher suffisamment  $\mathbf{x}^*$ ,  $r$  doit donc être choisi très grand, ce qui constitue l'inconvénient majeur des méthodes de pénalités, inconvénient alors contourné par l'utilisation du Lagrangien augmenté.

Le théorème suivant permet alors de ramener le problème sur  $f$  à un problème sur  $L_a$  :

#### THÉORÈME I.3

Soit le couple  $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$  satisfaisant les conditions du premier ordre du théorème (I.2). Si  $L_a(\mathbf{x}^*, \lambda^*, r)$  est un minimum (par rapport à  $\mathbf{x}$  et pour des valeurs finies strictement positives de  $r$ ) du problème sans contraintes dont  $L_a(\mathbf{x}, \lambda^*, r^*)$  est la fonction objectif, alors  $f(\mathbf{x}^*)$  est un minimum pour le problème avec contraintes dont  $f$  est la fonction objectif.

### I.2.4 Schéma de synthèse

Le tour d'horizon du paragraphe précédent, présentant certaines méthodes d'optimisation existantes et leur histoire, possédait un intérêt double :

- donner une vue générale d'un certain nombre de méthodes permettant de résoudre des problèmes d'optimisation, sans ou avec contraintes, afin de comprendre comment fonctionnent les algorithmes que nous serons amenés à utiliser par la suite,
- donner, en explicitant les spécificités de chaque méthode, le cheminement de pensée ayant conduit les chercheurs à proposer la méthode du Lagrangien augmenté, qui est, on le

rappelle, la méthode principale implémentée dans le logiciel d'optimisation que nous utiliserons : LANCELOT (CONN *et al.*, 1992).

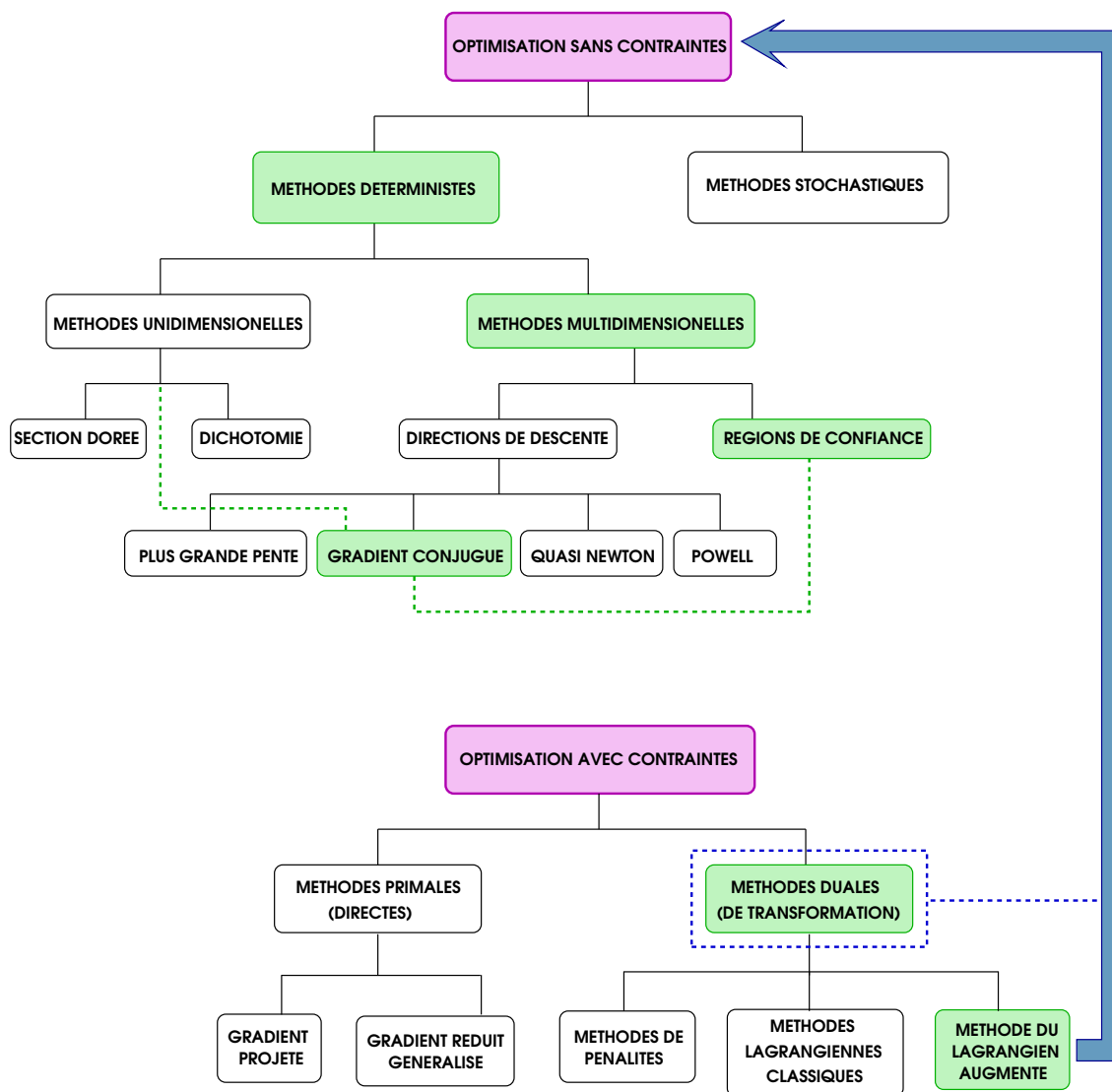


FIGURE I.4 – Principales méthodes d'optimisation existantes et utilisées

On récapitule donc, sous forme du schéma de synthèse I.4, les différentes méthodes présentées précédemment, en précisant (cases en vert sur le schéma) quelles sont celles auxquelles les algorithmes de LANCELOT font finalement appel. On précise que les méthodes à région de confiance utilisent, lors d'une des étapes de la résolution, des méthodes assimilables aux méthodes de gradients conjugués, qui utilisent elles-mêmes des méthodes d'optimisation unidimensionnelles. Il est important d'insister sur le terme "assimilable" car si la façon de procéder, c'est-à-dire, minimiser suivant la direction de plus grande pente, reste la même, quelques "détails" changent, en particulier le domaine sur lequel on optimise:  $\mathbb{R}^n$  tout entier pour les méthodes à direction de descente, et  $\mathbb{R}^n$  réduit à la région de confiance  $V^{(k)}$  pour les méthodes à région de confiance.

De même, mises à part les méthodes stochastiques, que nous ne prétendons pas juger, n'ayant en aucun cas le recul nécessaire à la comparaison, les méthodes utilisant des algorithmes basés sur le Lagrangien augmenté, semblent être, aujourd'hui, les plus efficaces quant à la résolution de problèmes de programmation mathématique faisant intervenir des fonctions aux fortes non linéarités. Ceci explique donc notre choix d'utiliser le logiciel LANCELOT, dont les algorithmes sont basés sur des méthodes de Lagrangien augmenté et à région de confiance.

Après avoir présenté de manière assez générale –l'optimisation occupant uniquement, dans notre étude, une place d'outil– les principales notions relatives à la théorie de l'optimisation, intéressons nous désormais à la théorie de l'homogénéisation qui nous permettra, au chapitre III, d'étudier l'adaptation de matériaux exhibant des hétérogénéités aussi bien mécaniques que géométriques.

### I.3 Théorie de l'homogénéisation en élasticité

Ce paragraphe est donc consacré à la présentation de la théorie de l'homogénéisation au travers de quelques éléments bibliographiques et théoriques nécessaires à sa bonne compréhension. L'organisation de la présentation repose sur le même principe que les deux paragraphes précédents : on présente diverses méthodes ayant trait à l'homogénéisation, en mettant en avant, pour chacune d'entre elles, leurs propriétés et insuffisances, afin de justifier notre utilisation ultérieure de cette branche particulière de l'homogénéisation qu'est *l'homogénéisation périodique*.

#### I.3.1 Origine et intérêt de la théorie

Afin de mettre en évidence l'intérêt des méthodes d'homogénéisation, considérons un matériau composite constitué, par définition, d'au moins deux composants (encore appelés *phases*) aux caractéristiques matérielles et géométriques différentes. Il est alors aisé de concevoir que la rupture de ce matériau dépend fortement des caractéristiques de ses constituants mais également de leur interaction. C'est en ce sens que le comportement en service, celui donc qui intéresse l'ingénieur et que nous appellerons *comportement macroscopique*, d'une structure constituée de matériaux composites, va fortement dépendre des mécanismes qui agissent aux niveaux de ses constituants. Il apparaît donc comme primordial de savoir appréhender les comportements, dits *microscopiques* (par opposition à l'échelle observable des comportements macroscopiques) des constituants, afin de pouvoir prévoir le comportement des structures à l'échelle macroscopique. Or, réaliser un calcul de structures en prenant rigoureusement en compte tous les mécanismes microscopiques est, du fait même de la présence des nombreuses hétérogénéités, quasi impossible. La complexité de la méthode qu'il faudrait adopter pour décrire exactement la structure hétérogène, si tant est que sa microstructure puisse être décrite de façon assez détaillée, est telle qu'il est plus raisonnable d'attribuer aux matériaux constitutifs de la structure un comportement homogène mais reflétant autant que possible le comportement hétérogène attendu. C'est là l'ob-



jectif principal (BORNERT *et al.*, 2001) des méthodes d'homogénéisation qui attirent l'attention depuis environ 1960, d'autant plus que l'élaboration de matériaux composites, conçus afin de posséder des performances bien spécifiques, connaît un essor permanent :

[...] Dédire de l'analyse des hétérogénéités du matériau étudié, par un traitement d'homogénéisation, un comportement macroscopique homogène, intégrable dans un calcul classique de système mécanique [...]

En d'autres termes, la théorie de l'homogénéisation consiste à remplacer un matériau réel hétérogène par un matériau fictif, dit *homogène équivalent*, censé se comporter de la même façon que le matériaux réel, une fois soumis au mêmes chargements. Une structure composée de ce matériau hétérogène sera alors calculée plus facilement, en supposant que le matériau obéit au comportement homogène équivalent.

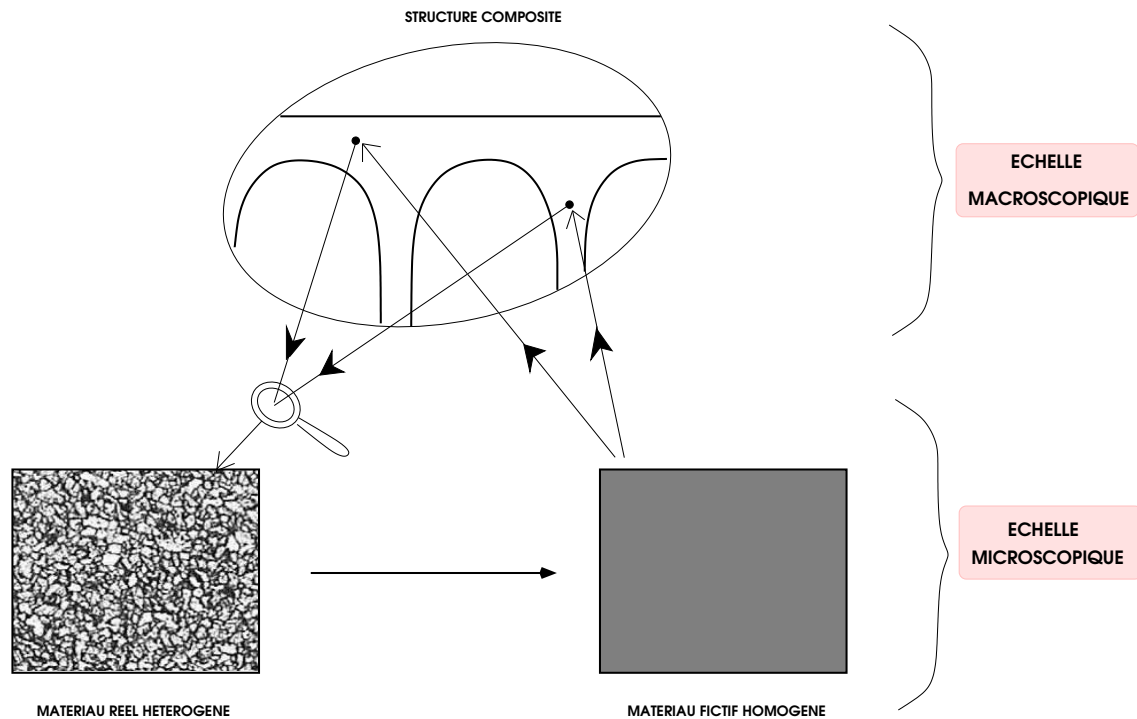


FIGURE I.5 – Principe de l'homogénéisation

Ainsi, l'illustration de cette théorie prend tout son sens si l'on se place d'un point de vue numérique. Considérons une structure macroscopiquement homogène (un pont par exemple, comme sur la figure I.5), mais constituée de matériaux hétérogènes. Si l'on voulait procéder à un calcul direct, il faudrait être capable de mailler la structure à l'échelle des hétérogénéités, ce qui impliquerait des problèmes de taille beaucoup trop grande et donc des temps et coûts de calculs beaucoup trop élevés par rapport à ce qu'il est raisonnable de consacrer habituellement à un tel calcul. La théorie de l'homogénéisation permet alors de considérer, à l'échelle de la structure,

un matériau homogène, "mélange" (dans un sens que nous préciserons plus tard) des matériaux constitutifs initiaux, qui se comporterait globalement de la même manière que le matériau composite hétérogène et sur lequel il est alors beaucoup plus simple de mener les calculs permettant d'analyser le comportement de la structure.

### I.3.2 Principes généraux de l'homogénéisation en élasticité

Afin de préciser les définitions qualitatives que l'on vient de donner de l'homogénéisation et des matériau et comportement homogènes équivalents, on détaille ci-dessous les différentes étapes d'un processus d'homogénéisation, du choix des échelles permettant de passer de la structure aux hétérogénéités, à l'obtention du comportement global (ou effectif) de ladite structure.

#### I.3.2.a Définition des échelles, choix du VER

L'échantillon de matériau hétérogène introduit à la figure I.5 est appelé *Volume Elementaire Représentatif* (noté par la suite VER ou  $V$ , de bord  $\partial V$ ) et est, par nature, représentatif des hétérogénéités de la structure composite. Il est choisi de manière à ce que chaque point de la structure, considérée comme globalement homogène, puisse être représenté par un VER. Ce choix de représenter un point macroscopique par un élément de volume, qui consiste en fait à effectuer un zoom sur le point afin de détailler les hétérogénéités qui lui sont associées, implique donc de faire la distinction entre les deux échelles évoquées précédemment :

- *l'échelle macroscopique* qui est l'échelle de la structure, des chargements imposés et de toutes autres quantités dépendantes uniquement de la position globale (ou macroscopique) notée  $\mathbf{X}$ ,
- *l'échelle microscopique* qui est l'échelle du VER, à l'intérieur duquel le repérage est défini par le vecteur  $\mathbf{x}$ , représentant la position locale.

A partir de ces définitions, on dispose désormais de repérages associés à chacune des deux échelles, comme le montre la figure I.6, où  $\delta$  représente le rapport d'échelle entre le microscopique et le

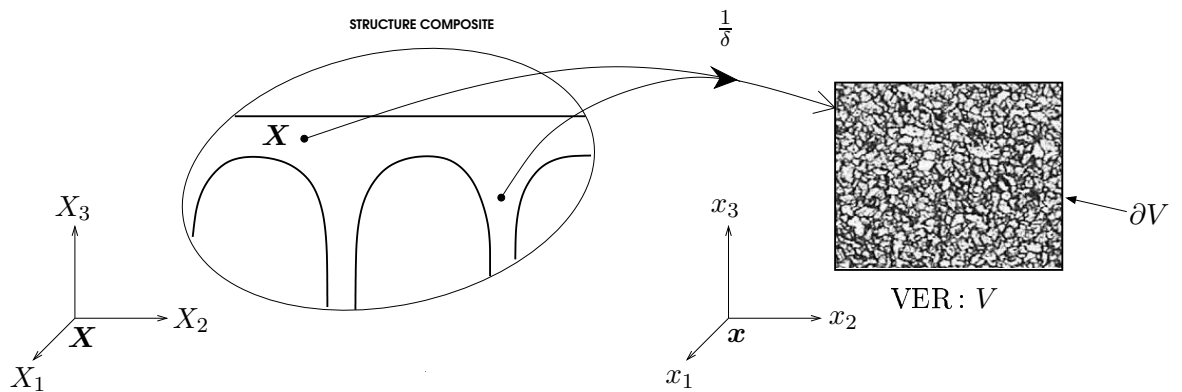


FIGURE I.6 – Définition des échelles et du VER

macroscopique. Si l'on note  $\boldsymbol{\sigma}^\delta$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^\delta$  les champs locaux de contraintes et de déformations régnant

dans le VER, alors de bons candidats pour les champs globaux de contraintes et de déformations régnant dans le milieu homogénéisé sont respectivement  $\Sigma$  et  $E$  tels que :

$$\begin{cases} \Sigma = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma^\delta \\ E = \lim_{\delta \rightarrow 0} \epsilon^\delta \end{cases} \quad (\text{I.24})$$

Une fois définies les quantités macroscopiques  $\Sigma$  et  $E$ , la loi de comportement du milieu homogénéisé sera alors la relation liant ces deux quantités. On présente dans ce qui suit une façon d'obtenir ces informations à partir de raisonnements, intuitifs certes, mais qui permettent de présenter les choses de manière plus "physique", en sortant du cadre formel des théories mathématiques nécessaires à la résolution de ce genre de problèmes de convergence avec petit paramètre.

### I.3.2.b Méthode des moyennes

En effet, même si les théories mathématiques constituent un cadre propice à des démonstrations rigoureuses, il est cependant possible d'étudier ce problème avec petit paramètre par d'autres méthodes. L'une d'entre elles repose sur les propriétés de moyenne des fonctions rapidement oscillantes. Considérons une fonction  $f^\delta : (\mathbf{X}, \mathbf{x}) \mapsto f(\mathbf{X}, \mathbf{x})$  représentant une variable d'état quelconque de notre problème, par exemple les champs locaux de contraintes ou de déformations. Chaque constituant du matériau hétérogène possédant, par définition, des propriétés différentes, les valeurs de  $f^\delta$  aux passages entre constituants (entre hétérogénéités) vont donc d'autant plus fluctuer que le nombre d'hétérogénéités est important et leur taille petite. Pour illustrer ceci, on représente figure I.7 une partie du matériau hétérogène, le long duquel on décrit une courbe  $C(\mathbf{x})$ . Tout champ de variables microscopiques  $f^\delta$  connaît alors une évolution d'autant plus rapidement oscillante que le nombre d'hétérogénéités est important. Il semble donc

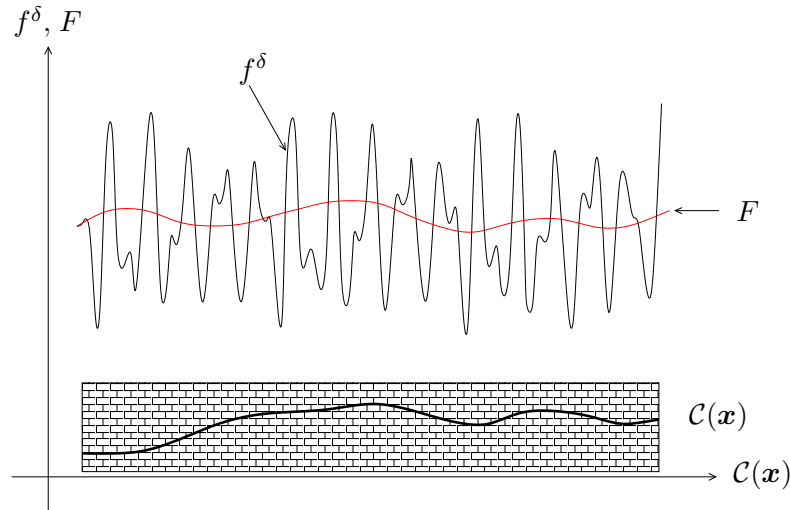


FIGURE I.7 – Valeur moyenne des variables d'état

naturel de postuler que la limite de  $f^\delta$  lorsque le petit paramètre tend vers zéro est égale à la

valeur moyenne de  $f$ , notée  $F$ , sur le VER ( $\Sigma$  désigne alors la valeur moyenne de  $\sigma$  et  $E$  la valeur moyenne de  $\varepsilon$ ). En d'autres termes, ceci revient à dire que toute variable d'état macroscopique est moyenne de son homologue microscopique. Reste alors à définir cette notion de moyenne, en ayant bien à l'esprit que la fonction  $f$  est un champ global en  $\mathbf{X}$  issu de variations locales sur un intervalle de  $\mathbf{x}$ . Cette constatation nous conduit alors à poser, quelle que soit la nature du milieu étudié :

$$F(\mathbf{X}) = \frac{1}{|V(\mathbf{X})|} \int_{V(\mathbf{X})} f(\mathbf{X}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \triangleq \langle f(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \rangle_{V(\mathbf{X})} \quad (\text{I.25})$$

où  $|V(\mathbf{X})|$  est une mesure du VER au point  $\mathbf{X}$  (sa longueur en dimension 1, son aire en dimension 2 et son volume en dimension 3). Pour en revenir aux quantités qui nous intéressent, ce raisonnement nous amène alors à poser les deux relations fondamentales suivantes, à la base de tout calcul ultérieur (BORNERT *et al.*, 2001) :

$$\begin{cases} \Sigma(\mathbf{X}) = \frac{1}{|V(\mathbf{X})|} \int_{V(\mathbf{X})} \sigma(\mathbf{X}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \triangleq \langle \sigma(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \rangle_{V(\mathbf{X})} \\ E(\mathbf{X}) = \frac{1}{|V(\mathbf{X})|} \int_{V(\mathbf{X})} \varepsilon(\mathbf{X}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \triangleq \langle \varepsilon(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \rangle_{V(\mathbf{X})} \end{cases} \quad (\text{I.26})$$

Par souci de simplicité de l'énoncé, on adopte à partir de ce point la convention suivante :

- toute variable **macroscopique** sera représentée par une lettre **majuscule** latine ou grecque sous-entendant qu'elle est exprimée au point  $\mathbf{X}$ ,
- toute variable **microscopique** sera, quant-à-elle, représentée par une lettre **minuscule** latine ou grecque sous-entendant qu'elle est exprimée au point  $(\mathbf{X}, \mathbf{x})$ .

De même, on notera désormais  $\sigma^\delta \equiv \sigma$  et  $\varepsilon^\delta \equiv \varepsilon$ . Avec ces conventions de notations, les relations (I.26) deviennent alors<sup>15</sup> :

$$\begin{cases} \Sigma = \frac{1}{|V|} \int_V \sigma d\mathbf{x} \triangleq \langle \sigma \rangle_V \\ E = \frac{1}{|V|} \int_V \varepsilon d\mathbf{x} \triangleq \langle \varepsilon \rangle_V \end{cases} \quad (\text{I.27})$$

Maintenant que les notions de volume élémentaire représentatif et de moyenne entre les grandeurs macroscopiques et leurs homologues microscopiques sont précisées, nous allons nous intéresser à la méthodologie même de la théorie de l'homogénéisation, c'est-à-dire aux différentes étapes composant un calcul d'homogénéisation.

### I.3.2.c Méthodologie de l'homogénéisation

En détaillant les différentes étapes inhérentes au processus d'homogénéisation, ce paragraphe met en évidence que l'homogénéisation –dans un sens qui sera précisé au fur et à mesure– n'est pas véritablement la finalité première de notre couplage adaptation/homogénéisation.

---

15. On précise que ces relations sont valables pour un matériau sans trou ni fissure et sous l'hypothèse d'adhérence parfaite entre les différents constituants.

### ■ Etape de représentation

L'étape de représentation consiste, après avoir choisi les échelles<sup>16</sup>, à définir le VER. On distingue alors deux classes de matériaux :

- les matériaux désordonnés, qui présentent une répartition aléatoire de leurs hétérogénéités et nécessitent alors une représentation statistique : ce sont par exemple les matériaux polycristallins, pour lesquels l'indétermination se traduit par des orientations et formes de grains aléatoires,
- les matériaux périodiques (c'est cette deuxième catégorie de matériaux que nous étudierons par la suite), qui présentent une microstructure aux propriétés répétitives et autorisent alors une représentation déterministe du VER qui sera dans ce cas une cellule, appelée *cellule de base* qui, translatée dans toutes les directions de l'espace d'étude, permettra de reconstituer entièrement le matériau : ce sont en général les matériaux composites, fabriqués dans un but bien particulier induisant, dans la plupart des cas, cette périodicité ; les matériaux stratifiés ou les composites à fibres longues sont de bons représentants de cette classe de matériaux, puisque l'orientation respective de leurs couches ou fibres a été choisie par l'homme par souci de performances.

Dans les deux cas, il faudra attribuer des propriétés matérielles et géométriques aux différents constituants, qui seront alors considérés comme homogènes à l'échelle microscopique. Notons cependant qu'une description exacte du VER reste généralement impossible et qu'il est donc illusoire de penser déterminer le comportement équivalent avec exactitude. De nombreux auteurs se sont donc attelés à concevoir différentes méthodes permettant d'encadrer les propriétés globales (ou effectives), ce qui constitue déjà de bons renseignements quant au comportement effectif.

### ■ Etape de localisation

C'est lors de cette deuxième étape qu'interviennent les différentes méthodes évoquées ci-avant. En effet, cette étape vise à déterminer les relations liant respectivement les contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  locales aux contraintes  $\boldsymbol{\Sigma}$  et déformations  $\boldsymbol{E}$  globales, dans le cadre de l'élasticité. Pour ce faire, on considère que les champs locaux (microscopiques) régnant dans le VER découlent des sollicitations qui lui sont imposées sous forme de champs globaux, résultant, eux, des sollicitations imposées à la structure sous forme de forces ou déplacements. A la fin de l'étape de localisation, on disposera donc des tenseurs  $\boldsymbol{a}^E$  et  $\boldsymbol{a}^\Sigma$ , respectivement appelés *tenseur de localisation en déformation* et *tenseur de localisation en contrainte*, tels que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{a}^E : \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{a}^\Sigma : \boldsymbol{\Sigma} \end{cases} \quad (\text{I.28})$$

Le paragraphe I.3.3 étant entièrement consacré à la présentation des différentes méthodes permettant d'obtenir ces tenseurs, on ne donne pas plus de détail sur cette étape à ce stade.

---

16. Le matériau présentant en général plusieurs niveaux d'hétérogénéités, il faut décider, en fonction de l'étude que l'on veut mener, quel niveau sera considéré comme suffisamment représentatif du milieu étudié.

### ■ Etape de d'homogénéisation

La dernière étape porte en effet le nom d'"étape d'homogénéisation". C'est donc par abus de langage que l'ensemble des trois étapes est communément appelé "processus d'homogénéisation", par référence à la finalité du processus. Cette étape consiste donc à déterminer entièrement le comportement homogène équivalent, à partir des trois informations suivantes :

- les relations de moyennes, énoncées heuristiquement par la méthode des moyennes, ou démontrées plus rigoureusement par des méthodes mathématiques,
- les relations (I.28) issues de l'étape de localisation,
- les lois de comportements microscopiques, attribuées à chacun des constituants lors de l'étape de représentation.

A la fin de cette étape, les lois de comportement homogénéisées (I.29) sont donc disponibles. Tout comme pour l'étape précédente, ces lois sont au nombre de deux, suivant que l'on ait imposé une déformation ou une contrainte macroscopique.

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V = \mathcal{B}^\Sigma : \Sigma \\ \Sigma = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V = \mathcal{B}^E : E \end{cases} \quad (\text{I.29})$$

Ces lois macroscopiques n'ont ensuite plus qu'à être attribuées au matériau homogène équivalent.

Comme nous le verrons plus tard, c'est l'étape de localisation qui est la plus importante pour notre étude. En effet, les seules données issues du processus d'homogénéisation qui sont nécessaires à l'étude d'adaptation sont les champs locaux de contraintes et de déformations, consécutifs à l'application au point  $\mathbf{X}$ , donc sur le VER, de contraintes et/ou déformations macroscopiques. C'est en ce sens que l'**étape** d'homogénéisation n'est pas la finalité première de notre étude. Les lois de comportement homogénéisées (I.29) issues de l'**étape** d'homogénéisation, peuvent par contre intervenir dans un deuxième temps, afin de vérifier que les résultats obtenus sur le VER rendent bien compte de ce qu'il se passe effectivement au niveau macroscopique.

### I.3.3 L'étape de localisation en détails : les différentes approches

De nombreux auteurs se sont intéressés à l'étape de localisation, qui peut donc maintenant être traitée de nombreuses façons différentes. Ce paragraphe insiste sur le pourquoi de ces recherches, puis donne un aperçu desdites méthodes en analysant leurs spécificités.

#### I.3.3.a Un problème mal posé

Les problèmes de localisation à résoudre afin d'exprimer les grandeurs microscopiques en fonction de leurs homologues macroscopiques peuvent être appréhendés de deux manières différentes : les sollicitations imposées sont soit le chargement moyen  $\mathbf{E}$ , soit le chargement moyen  $\Sigma$ . On obtient alors les problèmes suivants :

■ *Approche déformation :  $\mathbf{E}$  imposée*

$$\mathbf{div} \, \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{dans } V \quad (\text{I.30a})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{dans } V \quad (\text{I.30b})$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V = \mathbf{E} \quad (\text{I.30c})$$

■ *Approche contrainte :  $\boldsymbol{\Sigma}$  imposée*

$$\mathbf{div} \, \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{dans } V \quad (\text{I.31a})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{dans } V \quad (\text{I.31b})$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V = \boldsymbol{\Sigma} \quad (\text{I.31c})$$

Ces deux problèmes présentent donc les mêmes équations (I.30a) et (I.31a) d'équilibre du VER  $V$  qui ne font intervenir aucune force de volume, et les mêmes lois (I.30b) et (I.31b) de comportement local, définies par l'intermédiaire du tenseur d'élasticité  $\mathbf{d}$  choisi lors de l'étape de représentation. Par contre, la sollicitation imposée diffère d'un problème à l'autre : déformation macroscopique (I.30c) pour le problème en déformation et contrainte macroscopique (I.31c) pour le problème en contrainte. Or, ces relations liant déformations (respectivement contraintes) microscopiques et déformations (respectivement contraintes) macroscopiques n'étant, par définition, que des relations de moyenne, les problèmes de localisation (I.30) et (I.31) sont finalement mal posés, puisqu'ils ne possèdent aucune véritable condition limite. Il faut donc, pour éviter tout problème de non unicité de la solution, leur adjoindre des conditions limites sur le contour  $\partial V$  du VER, représentant au mieux les phénomènes subis par le milieu hétérogène ainsi que leurs conséquences. C'est ce que se proposent de faire les méthodes énoncées ci-après, qui travaillent soit à déformation imposée, soit à contrainte imposée, afin de transformer les problèmes (I.30) et (I.31) en des problèmes finalement bien posés.

### I.3.3.b Les théories en déformation

Les principales théories en déformation sont les suivantes : l'approximation de REUSS, la méthode des modules effectifs en déformation de HILL et MANDEL et la théorie de l'homogénéisation périodique en déformation, pour lesquelles chaque tenseur  $\mathbf{a}^{\mathbf{E}}$  obtenu sera différent.

■ *Approximation de VOIGT*

Cette approximation consiste à supposer que la déformation est uniforme dans le VER. On a ainsi :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) = \mathbf{E}(\mathbf{X}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \text{noté " } \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E} \quad \text{dans } V \text{ " } \quad (\text{I.32})$$

Elle a l'avantage de simplifier les calculs mais reste tout de même très rarement valide, puisqu'elle ne tient absolument pas compte des fluctuations des variables d'état microscopiques dues aux hétérogénéités locales du VER et ne prend pas en compte (I.30a). Il a été montré qu'elle conduisait en fait à une estimation par excès des propriétés effectives.

■ *Méthode des modules effectifs en déformation de HILL et MANDEL*

Ces auteurs laissent la déformation libre à l'intérieur du VER, mais imposent que le déplacement  $\mathbf{u}$  sur le bord  $\partial V$  soit homogène, du type :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) = \mathbf{E}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial V \quad \text{noté} \quad " \mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} \quad \text{sur } \partial V " \quad (\text{I.33})$$

Plus réaliste que la précédente, cette hypothèse possède cependant un domaine de validité restreint. Pour que les résultats soient représentatifs, il faut en effet que la concentration en hétérogénéités soit très faible : on trouve dans les travaux de SUQUET (1982) une estimation pour la concentration limite de 5%, concentration qui peut aller jusqu'à 20% si aucune hétérogénéité ne rencontre le bord  $\partial V$ . En effet, le déplacement microscopique étant supposé homogène sur le bord, toute variation de caractéristiques, qu'elles soient matérielles ou géométriques, entraîne alors une fluctuation, donc une inhomogénéité, de ce champ  $\mathbf{u}$ . Si cette hypothèse n'est pas satisfaite, il faut alors que la taille du VER soit grande relativement à la taille des hétérogénéités, ce qui revient à considérer un grand nombre d'hétérogénéités et qui annihile quelque peu l'intérêt de départ d'un raisonnement par homogénéisation qui est de réduire l'espace sur lequel les calculs sont menés. De plus, dans le cas des matériaux périodiques, les résultats obtenus par cette méthode dépendent du choix de la cellule de base (LÉNÉ, 1984). Cette méthode, comme la précédente, n'est donc pas appropriée dans notre cas.

■ *Homogénéisation périodique en déformation*<sup>17</sup>

Encore plus réaliste que les précédentes, cette méthode, *a priori* applicable dans le cas de matériaux à microstructure périodique, suppose que le champ de déplacements<sup>18</sup>  $\mathbf{u}^{pér}$ , défini par (I.34) :

$$\mathbf{u}^{pér} = \mathbf{u} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} \quad (\text{I.34})$$

est périodique de période  $V$ , et que le vecteur force  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  est anti-périodique sur les parties de  $\partial V$  qui se correspondent par périodicité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^{pér}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) = \mathbf{u}^{pér}(\mathbf{X}, \mathbf{x} + V) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial V \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) = -\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, \mathbf{x} + V) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}, \mathbf{x} + V) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial V \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \rangle_{V(\mathbf{X})} = \mathbf{E}(\mathbf{X}) \end{array} \right. \quad (\text{I.35})$$

noté  $\left\{ \begin{array}{l} " \mathbf{u}^{pér} \text{ périodique sur } \partial V " \\ " \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial V " \\ " \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V = \mathbf{E} " \end{array} \right.$

où  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure au bord  $\partial V$ . L'avantage principal de cette théorie réside dans le fait qu'elle est exacte pour les milieux périodiques. En effet, il a été montré (DUVAUT et LIONS (1972) et SANCHEZ-PALENCIA (1980)) que dans le cas de l'homogénéisation périodique, les contraintes

17. Cette théorie étant celle que nous utiliserons par la suite, elle sera présentée en détail au paragraphe I.3.4.

18. On donne plus d'explications au paragraphe suivant sur cette scission du champ de déplacements en une partie homogène et l'autre périodique.



et déformations macroscopiques intervenant dans la loi homogénéisée sont effectivement les quantités vers lesquelles convergent les champs locaux de contraintes et de déformations régnant dans la cellule de base lorsque le petit paramètre  $\delta$  tend vers zéro. De plus, d'autres études ont montré que les résultats issus de la résolution des problèmes de localisation par la méthode de l'homogénéisation périodique, ne dépendaient pas de cette cellule, ce qui, relativement aux remarques précédentes, constitue un avantage non négligeable. Le paragraphe I.3.3.d, dont l'objectif est de justifier notre choix d'utiliser cette théorie, insistera davantage sur ce fait, ainsi que sur la validité, *a fortiori*, de cette théorie en cas de matériaux aléatoires.

### I.3.3.c Les théories en contrainte

Sur le même principe que les approches en déformation, les principales théories en contrainte sont les suivantes : l'approximation de REUSS, la méthode des modules effectifs en contrainte de HILL et MANDEL et la théorie de l'homogénéisation périodique en contrainte, pour lesquelles chaque tenseur  $\mathbf{a}^\Sigma$  obtenu sera différent.

#### ■ Approximation de REUSS

L'approximation proposée par REUSS, duale de celle proposée par VOIGT, consiste donc à supposer que la contrainte est uniforme dans le VER :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{X}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \text{noté " } \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} \text{ dans } V \text{ " } \quad (\text{I.36})$$

Cette méthode, ne permettant pas de prendre rigoureusement en compte l'influence des hétérogénéités, possède évidemment les mêmes inconvénients que sa primale, sauf en dimension 1 où elle est exacte (SUQUET, 1982).

#### ■ Méthode des modules effectifs en contrainte de HILL et MANDEL

C'est ici une relation de type force imposée qui joue le rôle de condition limite au contour :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial V \quad \text{noté " } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \partial V \text{ " } \quad (\text{I.37})$$

Le cadre d'application de cette nouvelle hypothèse n'est cependant pas plus large que celui de la méthode en déformation.

#### ■ Homogénéisation périodique en contrainte<sup>19</sup>

Les conditions aux limites sont toujours de type périodicité, à ceci près que c'est désormais la contrainte macroscopique  $\boldsymbol{\Sigma}$  qui est donnée. Le champ de déplacements périodiques devient donc :

$$\mathbf{u}^{per} = \mathbf{u} - \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \rangle_V \cdot \mathbf{x} \quad (\text{I.38})$$

---

19. Voir la note de bas de page n°17.

De même, les conditions (I.35) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^{pér}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) = \mathbf{u}^{pér}(\mathbf{X}, \mathbf{x} + \mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial V \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) = -\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, \mathbf{x} + \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}, \mathbf{x} + \mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial V \\ \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, \mathbf{x}) \rangle_{V(\mathbf{X})} = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{X}) \end{array} \right. \quad (\text{I.39})$$

noté  $\left\{ \begin{array}{l} \text{" } \mathbf{u}^{pér} \text{ périodique sur } \partial V \text{ " } \\ \text{" } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial V \text{ " } \\ \text{" } \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V = \boldsymbol{\Sigma} \text{ " } \end{array} \right.$

La méthode est encore une fois exacte –la preuve peut être trouvée dans les travaux de SUQUET (1982)– pour les matériaux dits périodiques.

#### I.3.3.d Choix de l'homogénéisation périodique

Parmi les trois méthodes primales proposées, ainsi que les trois duales associées, c'est donc vers la méthode de l'homogénéisation périodique (en déformation ou en contrainte) que s'oriente notre préférence. Plusieurs raisons d'ordres différents motivent ce choix :

- la plupart des nouveaux matériaux créés par l'homme sont des matériaux composites, qui, de par leur processus de fabrication (orientations privilégiées des fibres, réalisation de matériaux multicouches, ...) sont rendus artificiellement périodiques,
- comme évoqué au paragraphe précédent, cette théorie autorise une définition rigoureuse, au sens mathématique, du comportement homogénéisé,
- le choix de la cellule de base n'influence en aucun cas les calculs : ainsi, et pour ne donner qu'un seul exemple, le VER associé à un matériau constitué d'inclusions régulièrement noyées dans une matrice sera un parallélépipède comportant une seule inclusion entourée de matrice, ce qui, numériquement parlant, facilite grandement les calculs. Ce phénomène d'indépendance de la taille du VER, ou plutôt, dans le cas de l'homogénéisation périodique, de la taille de la cellule de base, a été mis en évidence par MICHEL (2001). L'objectif de ses travaux est de comparer les capacités à déterminer certains coefficients homogénéisés, en fonction de la taille de la cellule de base, des méthodes des modules effectifs (en déformation et en contrainte) avec celles de l'homogénéisation périodique. Pour ce faire, il considère un composite à matrice d'aluminium renforcée par des fibres longues unidirectionnelles (matrice et fibres sont supposées homogènes et isotropes). Les fibres circulaires sont régulièrement réparties selon le motif de la figure I.8 (en coupe transversale) où l'on représente les différentes cellules de base testées. L'influence de la taille de la cellule sur les coefficients homogénéisés est analysée par l'intermédiaire des modules de cisaillement plan  $\mu_t$  et de compressibilité plane  $K$ . Les résultats qu'il a obtenus sont reportés figures I.9 et I.10, où  $m$  est défini tel que la cellule de base carrée  $V^m$  contienne  $m^2$  fibres. On constate que les théories des modules effectifs en déformation et en contrainte constituent des approximations, respectivement par excès et par défaut, des coefficients homogénéisés. Elles ne peuvent donc être vues que comme des bornes des propriétés effectives. De plus, l'inconvénient de ces méthodes est ici mis en lumière : elles ne commencent à donner des résultats

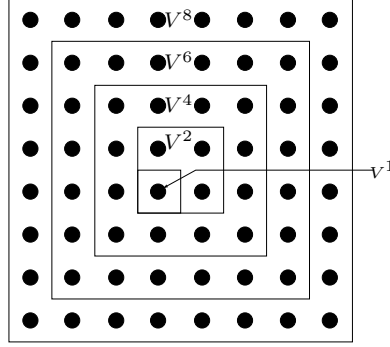


FIGURE I.8 – Différents VER:  $V^1$ , 1 inclusion;  $V^2$ , 4 inclusions;  $V^4$ , 16 inclusions;  $V^6$ , 36 inclusions et  $V^8$ , 64 inclusions

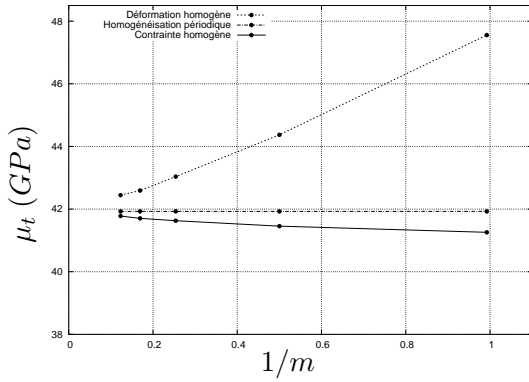


FIGURE I.9 – Variations de  $\mu_t$  en fonction du rapport  $1/m$  (d'après MICHEL (2001))

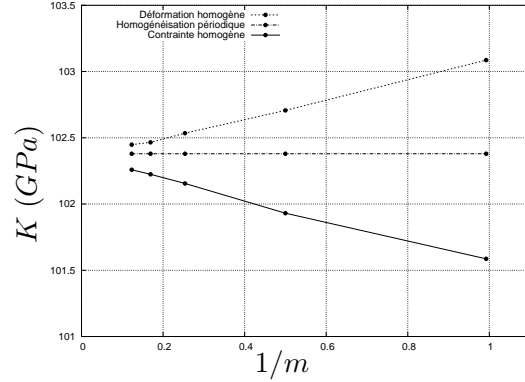


FIGURE I.10 – Variations de  $K$  en fonction du rapport  $1/m$  (d'après MICHEL (2001))

proches de ceux de l'homogénéisation périodique, qui, on le rappelle, est exacte pour les matériaux périodiques, que pour un nombre d'inclusions au moins égal à 64 ( $1/m = 0.125$ ). La théorie des modules effectifs en déformation peut être, en particulier pour le calcul de  $\mu_t$ , une très mauvaise estimation des coefficients homogénéisés pour un faible nombre d'inclusions. Par contre, à l'inverse de ces deux théories, la théorie de l'homogénéisation périodique fournit le même résultat quel que soit le nombre d'inclusions de la cellule de base. Autant alors, pour obtenir le même résultat, travailler sur la cellule  $V^1$ , ce qui, toujours en terme de considérations numériques, permettra de diminuer considérablement les temps de calculs.

- enfin, certains travaux, dont ceux de MICHEL *et al.* (1999) et KANIT *et al.* (2003), ont montré que la méthode de l'homogénéisation périodique était parfaitement applicable aux milieux aléatoires. Elle perd alors la propriété d'exactitude des résultats, mais fournit cependant d'excellentes approximations.

Toutes ces constatations nous permettent donc d'affirmer que la théorie de l'homogénéisation périodique est la plus appropriée pour notre étude (et le resterait si l'on considérait des matériaux

à microstructure désordonnée).

### I.3.4 Une branche particulière : l'homogénéisation périodique

On résume et précise ici les principales notions et équations de la théorie de l'homogénéisation périodique qui seront utilisées à partir du Chapitre III.

#### I.3.4.a Choix de la cellule de base

Le matériau hétérogène périodique est entièrement défini par la donnée du VER (figure I.11), alors appelé cellule de base, qui est elle-même définie comme étant la période des hétérogénéités. Il faut donc la choisir en prenant soin qu'elle soit suffisamment représentative de l'inhomogénéité

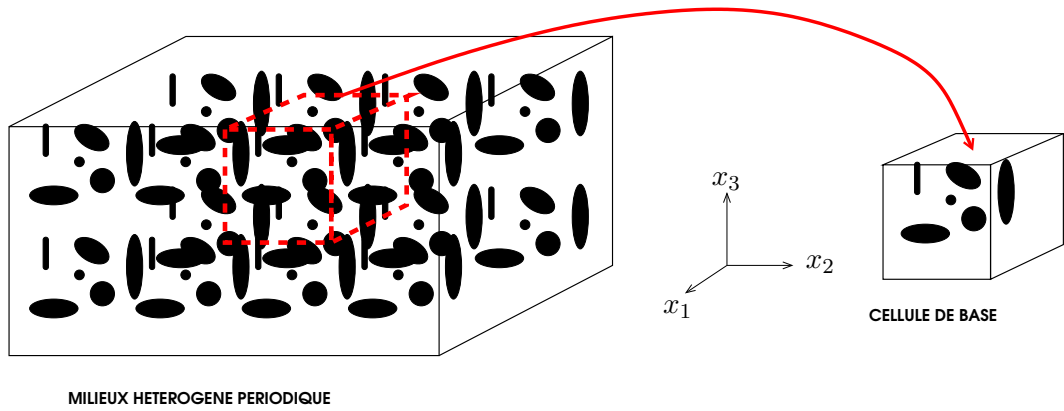


FIGURE I.11 – *Choix de la cellule de base*

du matériau initial. Il est cependant important d'exploiter le fait que ce choix n'est pas unique (MICHEL *et al.*, 1999) : deux cellules de base différentes, mais rendant compte du même niveau d'hétérogénéités (éternel problème du choix de l'échelle) conduiront au même comportement effectif. Il est donc astucieux de choisir une cellule de base dont la forme et les symétries simplifient l'écriture des conditions limites de type périodicité.

#### I.3.4.b Périodicité des champs microscopiques

La périodicité géométrique et matérielle du milieu étudié se répercute sur les champs locaux de déformations et de contraintes, qui sont, de fait, également périodiques de période  $V$ . Le champ local de déformations est donc la somme de deux contributions :

- une partie homogène, représentée par le champ moyen  $\bar{\varepsilon}$  ( $\bar{\varepsilon} = \mathbf{E}$  à déformation macroscopique  $\mathbf{E}$  imposée et  $\bar{\varepsilon} = \langle \varepsilon \rangle_V$  à contrainte macroscopique  $\Sigma$  imposée) qui serait le champ de déformations régnant dans la cellule de base si elle était homogène,
- une correction fluctuante  $\varepsilon^{per}$  due à la présence des hétérogénéités.

Cette décomposition nous permet de revenir sur les partitions (I.34) et (I.38) du champ de déplacements microscopiques  $\mathbf{u}$ , que l'on regroupe sous la seule définition (I.40), dans laquelle le champ de déplacements périodique  $\mathbf{u}^{pér}$  est en fait le champ de déplacements dont dérive la fluctuation  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pér}$ .

$$\mathbf{u} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}.\mathbf{x} + \mathbf{u}^{pér} \quad (\text{I.40})$$

En effet,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  dérivant de  $\mathbf{u}$  et  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  de  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}.\mathbf{x}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pér}$  ne peut que dériver de  $\mathbf{u}^{pér}$ . La conséquence directe de la périodicité de  $\mathbf{u}^{pér}$  est que la valeur moyenne de  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pér}$  est nulle :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{pér} \rangle_V = \mathbf{0} \quad (\text{I.41})$$

Le champ de contraintes microscopiques  $\boldsymbol{\sigma}$  est également périodique de période  $V$  et satisfait les équations d'équilibre (I.30a) ou (I.31a) dans  $V$ . Quant à la condition d'équilibre entre cellules voisines, elle s'exprime par l'intermédiaire de (I.35) ou (I.39) :  $\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}$  anti-périodique sur les bords  $\partial V$  de  $V$  qui se correspondent par périodicité.

#### I.3.4.c Problèmes cellulaires de localisation

Pour cette étape, on considère que les sollicitations imposées à la structure (globalement homogène mais microscopiquement hétérogène) sous forme de forces ou déplacements, induisent certains champs de contraintes  $\boldsymbol{\Sigma}$  et de déformations  $\mathbf{E}$  en chaque point macroscopique  $\mathbf{X}$ . L'équivalence " $\mathbf{X} \leftrightarrow$  Cellule de base" autorise alors à considérer ces quantités macroscopiques comme des sollicitations extérieures pour la cellule de base. Les problèmes de localisation à résoudre afin de connaître les champs de déformations et de contraintes qui règnent alors dans la cellule diffèrent donc selon que l'on travaille à déformation ou à contrainte imposée. On précise ici les hypothèses de travail communes aux deux approches : la cellule de base<sup>20</sup> ne contient **aucun trou et aucune fissure** et ses constituants sont tous supposés obéir à un comportement élastique linéaire.

##### ■ Approche déformation

Le problème de localisation  $P_{déf}^{(e),cl}$  à résoudre en cas de déformation macroscopique imposée  $\mathbf{E}$  s'énonce comme suit :

$$P_{déf}^{(e),cl} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ dans } V \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V . \mathbf{x} + \mathbf{u}^{pér} \text{ dans } V \\ \mathbf{u}^{pér} \text{ périodique sur } \partial V \\ \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial V \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V = \mathbf{E} \end{array} \right. \quad (\text{I.42})$$

20. Cette cellule de base sera dite de type *classique* (noté *cl*), par opposition aux deux autres types de cellules présentés aux paragraphes I.3.5 et I.3.6.

■ *Approche contrainte*

Par contre, si la contrainte macroscopique  $\Sigma$  qui est imposée, il faut alors résoudre  $P_{cont}^{(e),cl}$  :

$$P_{cont}^{(e),cl} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div} \, \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ dans } V \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d} : \boldsymbol{\varepsilon}(\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V . \mathbf{x} + \mathbf{u}^{per}) \text{ dans } V \\ \mathbf{u}^{per} \text{ périodique sur } \partial V \\ \boldsymbol{\sigma} . \mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial V \\ \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V = \Sigma \end{array} \right. \quad (\text{I.43})$$

Dans les deux cas, du fait de l'adjonction de conditions limites de type périodicité, ces problèmes possèdent assurément une solution unique en  $\mathbf{u}^{per}$  (et donc en  $\mathbf{u}$ ) à une translation près. L'importance de  $P_{def}^{(e),cl}$  et  $P_{cont}^{(e),cl}$  est capitale, puisque ce sont ces deux problèmes qu'il faudra résoudre lorsque l'on s'intéressera à l'adaptation d'une cellule de base soumise à un chargement macroscopique.

### I.3.5 Cas de structures fines perforées, sollicitées dans leur plan

En vue d'appliquer, au Chapitre V, la méthode numérique développée à une structure fine, périodiquement trouée et soumise à des sollicitations planes, on expose ici la particularisation des deux problèmes fondamentaux,  $P_{def}^{(e),cl}$  et  $P_{cont}^{(e),cl}$ , à ce type de milieu. La cellule de base n'est alors plus considérée de type *classique*, mais est dite *à cavités* et repérée par l'indice *cav*. On distingue ce cas du cas plus général, présenté au paragraphe suivant, afin de pouvoir comparer, au chapitre V, les résultats obtenus avec ceux de DÉBORDES *et al.* (1985), qui étudient une structure fine sollicitée en contraintes planes.

#### I.3.5.a Définition de la plaque perforée et de la cellule de base

On considère (figure I.12) une structure fine constituée par un réseau carré de trous cylindriques notés  $H$ . Les trous sont supposés régulièrement disposés aux sommets des carrés, et leur axe est orienté selon l'épaisseur de la structure. La répétitivité du milieu incite naturellement à choisir comme cellule de base  $V$  un morceau de structure contenant un seul trou  $H$ . Le bord de

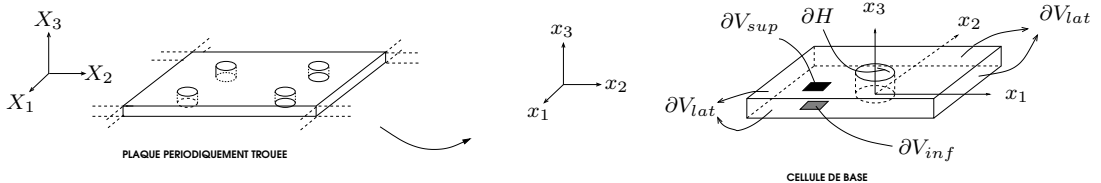


FIGURE I.12 – *Plaque trouée et cellule de base associée*

la cellule de base est alors découpé en quatre parties :

- la peau supérieure  $\partial V_{sup}$ , qui, à la différence des cellules de base vues jusqu'à présent, est libre de contraintes,

- la peau inférieure  $\partial V_{inf}$  également libre de contraintes,
- le contour latéral  $\partial V_{lat}$  sur lequel seront explicitées les conditions d'équilibre entre cellules voisines,
- le bord  $\partial H$  du trou, qui est lui aussi libre de toutes contraintes.

Cette géométrie particulière est donc à l'origine des modifications de la définition même de l'opérateur moyenne sur la cellule de base et des conditions limites à prendre en compte sur le bord  $\partial V$ <sup>21</sup>.

### I.3.5.b Opérateur moyenne et conditions limites

En effet, le champ de déformations microscopiques n'étant pas défini dans le trou, il faut alors redéfinir<sup>22</sup> l'opérateur moyenne s'appliquant aux déformations. De plus, ne nous intéressant qu'aux comportements dans le plan, on définit  $\tilde{\mathbf{a}}$  comme étant la restriction aux composantes  $(\alpha, \beta)$  de tout tenseur  $\mathbf{a}$  d'ordre 2 de la façon suivante :

$$\begin{cases} \tilde{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} & (\alpha, \beta) \in (1, 2)^2 \\ \tilde{a}_{i3} = \tilde{a}_{3i} = 0 & i \in (1, 2, 3) \end{cases} \quad (\text{I.44})$$

L'opérateur moyenne devient alors :

$$\langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle_V = \langle \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} \rangle_V = \frac{1}{2|V|} \int_{\partial V_{lat}} (u_\alpha n_\beta + u_\beta n_\alpha) dS \quad (\text{I.45})$$

où  $\mathbf{n}$  désigne la normale extérieure au bord de la cellule de base, noté  $\partial V$ . On précise que cette relation n'est valable que dans le cas où les cavités ne rencontrent pas le bord de la cellule de base :  $\partial H \cap \partial V = \emptyset$ .

De même, les contraintes étant nulles dans la cavité, si l'on note  $V^*$  ( $V^* = V - H$ ) la partie effectivement matérielle de  $V$ , alors l'opérateur moyenne sur les contraintes devient :

$$\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle_V = \frac{1}{|V|} \int_{V^*} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} dV \quad (\text{I.46})$$

La géométrie particulière influence également l'écriture des conditions limites en  $\boldsymbol{\sigma}$  des problèmes de localisation élastiques : elles doivent en effet être écrites sur le bord  $\partial H$  de la cavité et sur les peaux  $\partial V_{sup}$  et  $\partial V_{inf}$ , en plus de l'être sur le bord latéral  $\partial V_{lat}$ . Les problèmes  $P_{\text{def}}^{(e),cl}$  et  $P_{\text{cont}}^{(e),cl}$  deviennent donc :

$$P_{\text{def}}^{cav} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ dans } V^* \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d} : \varepsilon(\langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_V \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^{pér}) \text{ dans } V^* \\ \mathbf{u}^{pér} \text{ périodique sur } \partial V_{lat} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial V_{lat} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial H \cup \partial V_{sup} \cup \partial V_{inf} \\ \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_V = \tilde{\mathbf{E}} \text{ au sens de (I.45)} \end{array} \right. \quad (\text{I.47})$$

21. On précise que  $\partial V = \partial V_{lat} \cup \partial V_{inf} \cup \partial V_{sup}$ .

22. On redéfinit effectivement l'opérateur mais, par abus de notation, on continue de le noter  $\langle \dots \rangle_V$ . Ce symbole sera donc à comprendre au sens de (I.27) lorsque le milieu ne comportera aucune cavité, et au sens de (I.45) dans le cas contraire.

et :

$$P_{cont}^{cav} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div} \, \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ dans } V^* \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d} : \varepsilon(\langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_V \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^{pér}) \text{ dans } V^* \\ \mathbf{u}^{pér} \text{ périodique sur } \partial V_{lat} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial V_{lat} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial H \cup \partial V_{sup} \cup \partial V_{inf} \\ \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \rangle_V = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \text{ au sens de (I.46)} \end{array} \right. \quad (\text{I.48})$$

### I.3.6 Cas des plaques périodiques sollicitées en membrane et en flexion

De même, afin de considérer (Chapitre V) des structures de type plaque périodiquement hétérogène sollicitée en membrane et en flexion, on particularise les deux problèmes de localisation élastiques à ce type de structure, pour lequel la cellule de base est repérée par l'indice  $^{plq}$ .

#### I.3.6.a Définition de la structure périodique et de la cellule de base

On considère donc une plaque hétérogène dont le feuillet moyen se situe dans le plan  $(X_1, X_2, 0)$ . On suppose que l'épaisseur  $e$  (selon  $X_3$ ) de la plaque est très petite par rapport aux deux dimensions du plan perpendiculaire et que la plaque est constituée par la répétition d'un motif, prenons un I pour fixer les idées, dans ces deux directions. Ces relations d'ordre entre les différentes dimensions de la structure impliquent alors l'introduction d'un petit paramètre  $\zeta$  tel que :

$$\zeta = \frac{e}{L} \ll 1 \quad (\text{I.49})$$

où  $e$  désigne l'épaisseur de la plaque et  $L$  sa longueur caractéristique. Comme le montre la figure I.13, la répétitivité du motif permet, comme dans le cas tridimensionnel, de définir une cellule de base, génératrice de la structure entière par périodicité. On suppose de plus que la pé-

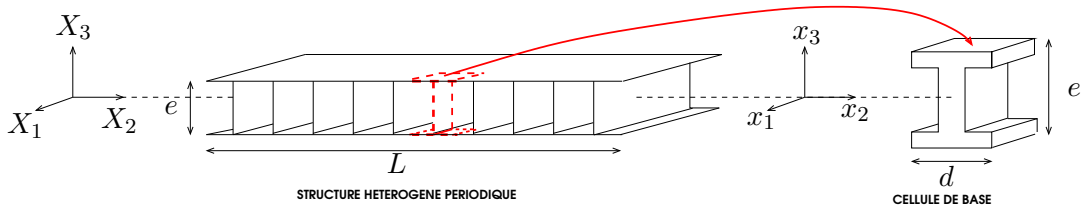


FIGURE I.13 – Cellule de base d'une plaque périodique

riode  $d$  de la cellule de base est très inférieure à la longueur caractéristique  $L$ . D'où l'introduction d'un second petit paramètre  $\eta$ , tel que :

$$\eta = \frac{d}{L} \ll 1 \quad (\text{I.50})$$

Finalement, on se place dans le cadre de structures pour lesquelles :

$$\zeta \approx \eta \quad (\text{I.51})$$



Sous cette hypothèse, et toujours dans le cadre du comportement élastique des matériaux, il a été montré par CAILLERIE (1984), qu'en faisant tendre les deux petits paramètres simultanément vers zéro, le comportement asymptotique était équivalent à un comportement homogénéisé de LOVE-KIRCHOFF. On a alors :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \mathcal{B}^{\mathbf{E},\mathbf{K}} : \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{K} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.52})$$

ou :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{K} \end{Bmatrix} = \mathcal{B}^{\mathbf{N},\mathbf{M}} : \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.53})$$

où  $\mathbf{E}$  regroupe les déformations de membrane  $E_{\alpha\beta}$ ,  $(\alpha\beta) \in (1,2)^2$ ,  $\mathbf{K}$  les déformations de flexion  $K_{\alpha\beta}$ ,  $\mathbf{N}$  les contraintes de membrane  $N_{\alpha\beta}$ ,  $\mathbf{M}$  les contraintes de flexion  $M_{\alpha\beta}$  et où  $\mathcal{B}^{\mathbf{E},\mathbf{K}}$  et  $\mathcal{B}^{\mathbf{N},\mathbf{M}}$  sont les tenseurs effectifs. Cependant, dans la même optique que précédemment, on s'intéresse plus à déterminer les contraintes et déformations microscopiques engendrées par un chargement macroscopique, qui sera donc, cette fois-ci, de type contrainte ou déformation généralisée, qu'à déterminer ce comportement équivalent.

### I.3.6.b Chargements imposés et problèmes de localisation

Le chargement macroscopique est en effet exprimé en termes de contrainte et/ou de déformation généralisée. Selon le même principe qu'au paragraphe I.3.4.c, par l'intermédiaire des sollicitations imposées à la structure, la cellule de base subit donc le chargement :

- $(\mathbf{E}, \mathbf{K})$  si l'on travaille à déformation imposée,
- $(\mathbf{N}, \mathbf{M})$  si l'on travaille à contrainte imposée.

Le problème de localisation à déformation imposée,  $P_{\text{déf}}^{\text{plq}}$ , s'écrit :

$$P_{\text{déf}}^{\text{plq}} \begin{cases} \text{div } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ dans } V \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d} : (\mathbf{E} - x_3 \mathbf{K} + \varepsilon(\mathbf{u}^{\text{pér}})) \text{ dans } V \\ \mathbf{u}^{\text{pér}} \text{ périodique sur } \partial V_{\text{lat}} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial V_{\text{lat}} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial V_{\text{inf}} \text{ et } \partial V_{\text{sup}} \end{cases} \quad (\text{I.54})$$

avec :

$$E_{i3} = E_{3i} = K_{i3} = K_{3i} = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (\text{I.55})$$

Les contraintes macroscopiques généralisées sont alors données par :

$$N_{\alpha\beta} = \frac{1}{|\bar{V}|} \int_V \boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta} d\mathbf{S} = \langle \boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta} \rangle_{\bar{V}} \quad (\text{I.56a})$$

$$M_{\alpha\beta} = -\frac{1}{|\bar{V}|} \int_V x_3 \boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta} d\mathbf{S} = \langle -x_3 \boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta} \rangle_{\bar{V}} \quad (\text{I.56b})$$

où  $\bar{V}$  représente l'aire du feuillet moyen de la cellule de base et où les indices latins varient toujours de 1 à 3 et les indices grecs de 1 à 2. Comme au paragraphe précédent,  $\partial V_{\text{lat}}$  représente

les bords latéraux de  $\partial V$ , alors que  $\partial V_{inf}$  et  $\partial V_{sup}$  sont respectivement les faces inférieure et supérieure.

Le problème de localisation à contrainte imposée,  $P_{cont}^{plq}$ , considère quant-à-lui les déformations généralisées comme inconnues et s'écrit :

$$P_{cont}^{plq} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div} \, \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ dans } V \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{d} : (\mathbf{E} - x_3 \mathbf{K} + \varepsilon(\mathbf{u}^{per})) \text{ dans } V \\ \mathbf{u}^{per} \text{ périodique sur } \partial V_{lat} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial V_{lat} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial V_{inf} \text{ et } \partial V_{sup} \\ \frac{1}{|\bar{V}|} \int_V \sigma_{\alpha\beta} \, d\mathbf{S} = N_{\alpha\beta} \\ -\frac{1}{|\bar{V}|} \int_V x_3 \sigma_{\alpha\beta} \, d\mathbf{S} = M_{\alpha\beta} \end{array} \right. \quad (I.57)$$

Finalement, on précise que les problèmes de localisation pour des structures mixtes, c'est-à-dire de type plaque trouée sollicitée en membrane ou en flexion, s'obtiennent par composition des problèmes de localisation présentés lors des deux derniers paragraphes I.3.5 et I.3.6.

## I.4 Bilan du chapitre

Après quelques rappels historiques dont les objectifs étaient, au travers de l'évolution des théories de calcul de structures, d'introduire la théorie de l'adaptation élastoplastique et d'en justifier l'utilité lors d'un calcul de structures sous chargements variables, nous avons présenté les origines et fondements classiques de ladite théorie. Nous nous sommes ensuite intéressés aux extensions de cette théorie classique, tant d'un point de vue théorique, que numérique ou expérimental. Nous avons en particulier exposé de manière substantielle les deux grands types d'approches permettant de résoudre un problème d'adaptation : l'approche incrémentale et l'approche directe sur laquelle est basée notre étude. Cette seconde approche conduisant à considérer des problèmes d'optimisation non linéaire sous contraintes, nous avons présenté, dans un second temps, un bref historique de la programmation mathématique, toujours dans l'objectif de comprendre l'intérêt et le fonctionnement des méthodes que nous utiliserons par la suite : le Lagrangien augmenté et les régions de confiance. Enfin, un autre mot clef du présent travail étant "l'homogénéisation", nous nous sommes intéressés, dans un dernier temps, aux différentes théories ayant trait à l'homogénéisation, en ayant toujours soin de justifier, par des comparaisons entre méthodes, notre choix d'utiliser plus tard la branche particulière de l'homogénéisation qu'est l'homogénéisation périodique. Une fois exposées les principales notions de cette théorie en se basant sur le cas de matériaux classiques sans trous ni fissures, nous avons considéré deux cas particuliers que nous traiterons également dans le chapitre des applications (Chapitre V) : les structures fines périodiquement trouées sollicitées dans leur plan et les plaques périodiques hétérogènes sollicitées en membrane et en flexion.



## CHAPITRE II

# Phénomène d'adaptation de structures élastoplastiques

---

**L**a théorie de l'adaptation étant assez peu usuelle, ou tout au moins assez peu répandue en France, par rapport aux théories de l'optimisation et de l'homogénéisation, ce deuxième chapitre est consacré à la présentation détaillée du phénomène d'adaptation, après en avoir introduit les quelques principes de base lors du chapitre précédent. Nous explicitons donc en premier lieu le cadre de travail adopté par tous les chercheurs s'intéressant à l'adaptation. Afin d'appréhender correctement le phénomène, les différentes réponses exhibées par une structure élastoplastique soumise à un chargement variable sont présentées. En guise d'illustration, le phénomène est ensuite mis en évidence de deux façons différentes : l'une expérimentale issue des travaux de KÖNIG (1987) et l'autre numérique issue de simulations sous le logiciel éléments finis ABAQUS. La notion de contraintes résiduelles est également explicitée au travers d'une étude analytique. Finalement, on énonce les deux théorèmes classiques de la théorie de l'adaptation, en leur associant, autant que faire ce peut, une interprétation énergétique claire.

---

## PLAN DU CHAPITRE II

---

<b>II.1 Cadre de travail classique . . . . .</b>	<b>53</b>
II.1.1 Milieu 3D étudié et chargements imposés . . . . .	53
II.1.2 Hypothèses de base et conséquences . . . . .	54
II.1.2.a Transformations isothermes et évolution quasi-statique . . . . .	54
II.1.2.b Hypothèses des petites transformations . . . . .	54
II.1.2.c Matériaux constitutifs élastoplastiques parfaits . . . . .	55
II.1.3 La notion de contraintes résiduelles . . . . .	56
<b>II.2 Les différents types de comportements d'une structure élastoplastique sous chargements variables . . . . .</b>	<b>58</b>
II.2.1 Réponse purement élastique . . . . .	58
II.2.2 Effondrement instantané par écoulement illimité . . . . .	58
II.2.3 Effondrement incrémental par accumulation de déformations plastiques	59
II.2.4 Plasticité alternée et fatigue oligocyclique . . . . .	60
II.2.5 Adaptation par stabilisation des déformations plastiques . . . . .	61
<b>II.3 Mise en évidence du phénomène d'adaptation . . . . .</b>	<b>61</b>
II.3.1 Etude expérimentale de KÖNIG . . . . .	62
II.3.1.a Portique élastoplastique et chargement imposé . . . . .	62
II.3.1.b Protocole expérimental et observations . . . . .	62
II.3.2 Etude analytique d'une poutre en flexion pure . . . . .	64
II.3.2.a Position du problème . . . . .	64
II.3.2.b Illustration de la notion de contraintes résiduelles . . . . .	65
II.3.3 Etude numérique d'une poutre en flexion . . . . .	67
II.3.3.a Position du problème . . . . .	68
II.3.3.b Représentation numérique et interprétation énergétique des dif- férents comportements observables . . . . .	68
<b>II.4 Les deux théorèmes de base de la théorie de l'adaptation d'une structure</b>	<b>71</b>
II.4.1 Théorème d'adaptation statique de MELAN . . . . .	72
II.4.1.a Problème purement élastique . . . . .	73
II.4.1.b Problème aux contraintes résiduelles . . . . .	73
II.4.1.c Preuve du théorème de MELAN . . . . .	73
II.4.2 Coefficient de sécurité à l'adaptation . . . . .	74
II.4.3 Théorème d'adaptation cinématique de KOITER . . . . .	76
<b>II.5 Bilan du chapitre . . . . .</b>	<b>78</b>

---

On oublie, le temps d'un chapitre, les théories de l'optimisation et de l'homogénéisation, afin de se concentrer sur la théorie de l'adaptation élastoplastique : les conventions de notations du chapitre précédent sont donc momentanément abandonnées. Les champs désignés par une lettre minuscule ne représentent plus nécessairement un champ microscopique, mais sont simplement les champs habituels en mécanique des milieux continus. Cette convention momentanée perd donc son effet à la fin du présent chapitre.

## II.1 Cadre de travail classique

A titre d'exemple, le vecteur  $\mathbf{y}$  utilisé dans ce paragraphe et dans tout ce chapitre, représente simplement la position des points du milieu considéré, sans aucune connotation microscopique. Les variables d'état sont donc dépourvues de toute notion d'échelle et dépendent simplement du couple  $(\mathbf{y}, t)$ .

### II.1.1 Milieu 3D étudié et chargements imposés

Le milieu étudié (figure II.1), noté  $\Omega$ , est un milieu continu tridimensionnel, positionné dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  que l'on munit d'une base orthonormée directe  $\{y_i\}_{i=1,2,3}$ . Par abus de notation, on désigne par  $\Omega$  le volume occupé par le milieu et par  $\partial\Omega$  la surface de ce milieu. On suppose que

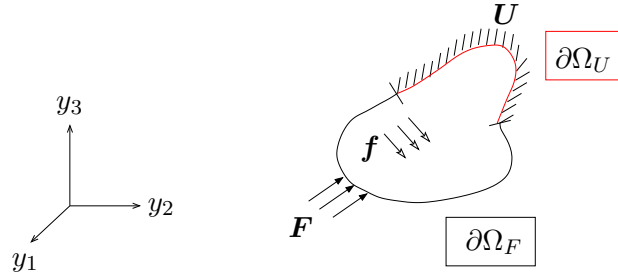


FIGURE II.1 – *Milieu continu 3D et sollicitations*

les sollicitations extérieures au milieu sont de trois types :

- des forces volumiques  $\mathbf{f}$ , qui s'exercent sur le volume  $\Omega$ ,
- des forces surfaciques  $\mathbf{F}$ , qui s'exercent sur une partie  $\partial\Omega_F$  de  $\partial\Omega$ ,
- des déplacements  $\mathbf{U}$ , imposés sur une partie  $\partial\Omega_U$  de  $\partial\Omega$ ,

où la partition de la surface  $\partial\Omega$  est définie de la manière suivante :  $\partial\Omega = \partial\Omega_F \cup \partial\Omega_U$  et  $\partial\Omega_F \cap \partial\Omega_U = \emptyset$ . On précise ici un point important et spécifique à la théorie de l'adaptation : ces sollicitations varient indépendamment les unes des autres mais dans des limites prescrites. On a donc, pour définir de façon très simplifiée le domaine de chargements :

$$\begin{cases} f_i^{\min} \leq f_i \leq f_i^{\max} \\ F_i^{\min} \leq F_i \leq F_i^{\max} \\ U_i^{\min} \leq U_i \leq U_i^{\max} \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Pour faire le lien avec le chapitre précédent, ce sont ces sollicitations qui vont être à l'origine de l'existence, en chaque point du milieu continu, de contraintes et de déformations, qui seront à leur tour considérées comme des chargements macroscopiques pour le VER.

### II.1.2 Hypothèses de base et conséquences

Afin de se placer dans le cadre d'application des deux théorèmes classiques de l'adaptation, on énonce ici les différentes hypothèses assurant leur validité.

#### II.1.2.a Transformations isothermes et évolution quasi-statique

Les deux hypothèses suivantes découlent directement de la nature et des propriétés des sollicitations. On suppose tout d'abord qu'elles ne sont pas de type thermique : les chargements seront donc uniquement mécaniques et on ne considèrera pas l'influence de la température. Enfin, si elles sont dépendantes du temps, on suppose que les variations  $\dot{\mathbf{f}}$ ,  $\dot{\mathbf{F}}$  et  $\dot{\mathbf{U}}$  sont si lentes que l'évolution peut être considérée comme quasi-statique.

#### II.1.2.b Hypothèses des petites transformations

On considère ensuite que les transformations sont infiniment petites. Ceci implique que le tenseur des déformations,  $\varepsilon$ , peut s'exprimer comme le gradient symétrique du déplacement. De plus, la configuration du milieu continu  $\Omega$  évoluant très peu entre l'instant initial et l'instant final, les dérivations sont effectuées par rapport à la configuration initiale. En posant pour toute variable  $\mathbf{a}$ , dépendante de l'espace, que :

$$a_{i,j} = \frac{\partial a_i}{\partial y_j} \quad (i,j) \in (1,2,3)^2, \quad (\text{II.2})$$

on a alors :

$$\varepsilon = \mathbf{grad}_s \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{II.3})$$

De même, cette hypothèse conduit aux équations d'équilibre suivantes, dans lesquelles le tenseur des contraintes est désigné par  $\boldsymbol{\sigma}$  et les termes d'inertie sont négligés :

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (\text{II.4})$$

ainsi qu'aux conditions limites (II.5) sur la surface, où  $\mathbf{n}$  désigne la normale unitaire extérieure à la surface  $\partial\Omega$  :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F} & \text{sur } \partial\Omega_F \\ \mathbf{u} = \mathbf{U} & \text{sur } \partial\Omega_U \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

On regroupe ensuite les équations d'équilibre (II.4) et les conditions limites (II.5.a) sous une seule équation (II.6), classiquement connue sous le nom de *Principe des travaux virtuels*, qui est à la base de la démonstration du théorème de MELAN :

$$\forall \delta \mathbf{u} \in \mathbf{CA}^0, \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \varepsilon(\delta \mathbf{u}) \, dV = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial\Omega_F} \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS \quad (\text{II.6})$$

Le domaine de validité de ce principe (II.6) est le suivant :

- les contraintes peuvent présenter des discontinuités, mais il faut que les vecteurs  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  soient continus, où  $\mathbf{n}$  est la normale à la surface interne de discontinuité,
- le déplacement  $\mathbf{u}$  est supposé continu<sup>1</sup>.

### II.1.2.c Matériaux constitutifs élastoplastiques parfaits

Enfin, on suppose que les matériaux constitutifs du milieu sont élastoplastiques parfaits. Le cadre plus général du théorème de MELAN autorise des matériaux à écrouissage cinématique linéaire, mais en vue des applications considérées au chapitre V, l'hypothèse d'élastoplasticité parfaite suffit.

#### ■ Décomposition de la déformation

Afin de s'intéresser aux conséquences de l'hypothèse d'élastoplasticité parfaite, on présente en premier lieu la décomposition additive de la déformation. On suppose en effet que la déformation totale  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est divisée en deux parties, l'une élastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  et l'autre plastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (\text{II.7})$$

La partie élastique de la déformation est alors donnée par l'inverse de la loi de HOOKE faisant intervenir le tenseur  $\mathbf{S}$  de souplesse :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{II.8})$$

#### ■ Principe du travail maximal

On suppose de plus, comme évoqué au chapitre I, que les matériaux obéissent au *Principe du travail maximal* de HILL, qui stipule que si  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  est une vitesse de déformations plastiques non nulle, associée à un état de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ , alors on a :

$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^s) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p > 0 \quad (\text{II.9})$$

où  $\boldsymbol{\sigma}^s$  est un état de contraintes de sécurité, c'est-à-dire un état de contraintes n'impliquant aucun changement de l'état de déformations plastiques associé : en d'autres mots, cet état de contraintes est strictement inclus dans le domaine d'élasticité des matériaux.

On a également :

$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^a) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \geq 0 \quad (\text{II.10})$$

où  $\boldsymbol{\sigma}^a$  est un état de contraintes dit admissible, c'est-à-dire qui peut, ou non, faire évoluer l'état de déformations plastiques associé : c'est un état de contraintes qui peut donc se trouver sur la frontière du domaine d'élasticité, qui est alors appelée *surface seuil de plasticité*. L'inégalité (II.10) implique alors, on le montrerait par des considérations géométriques, que la surface

---

1. Dans le cas contraire, et si la composante du déplacement normale à la surface de discontinuité, c'est-à-dire la composante  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ , où  $\mathbf{n}$  est la normale à la surface de discontinuité, est continue, alors il faut alors rajouter au membre de gauche de (II.6) le terme  $\sum_k \int_{S_k} \sigma_{ij} n_j \Delta u_i dS_k$ , où  $S_k$  est la  $k^{\text{ème}}$  surface interne de discontinuité et  $\Delta u_i$  la discontinuité en déplacement associée.



seuil de plasticité, définie par une fonction  $\mathcal{F}$  telle que  $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ , est forcément convexe.

La propriété suivante est également fondamentale à l'expression explicite des déformations plastiques : pour tout taux de contraintes  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  associé à un taux de déformations plastiques  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ , on a :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \geq 0 \quad (\text{II.11})$$

#### ■ Expression de la déformation plastique

On en arrive finalement à l'hypothèse fondamentale de ce paragraphe : les matériaux sont élastoplastiques parfaits, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas en mesure de supporter une contrainte excédant leur limite d'élasticité, encore appelée *contrainte seuil*. Sous cette hypothèse, la relation (II.11) devient alors :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = 0 \quad (\text{II.12})$$

Cette nouvelle relation, associée au choix de considérer que  $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$  définit le domaine d'élasticité, permet de donner une expression explicite pour les déformations plastiques : *la loi de normalité*, tout comme l'inverse de la loi de HOOKE permet d'expliciter la partie élastique de la déformation totale. On a en effet,

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{II.13})$$

où  $\lambda$  est le *multiplicateur plastique* satisfaisant :

$$\begin{cases} \lambda = 0 & \text{si } \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \text{ ou si } \left( \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \text{ et } \dot{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0 \right) \\ \lambda \geq 0 & \text{si } \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}) = \dot{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

Les hypothèses de travail, ainsi que leurs principales conséquences, ayant été exposées, on s'intéresse désormais à une seconde façon de partitionner la déformation totale, ou plutôt à une sous partition de la partition (II.7) présentée plus haut.

### II.1.3 La notion de contraintes résiduelles

En effet, il a été évoqué au chapitre précédent, et ceci sera illustré au paragraphe II.3, que les contraintes résiduelles, existantes ou préexistantes dans une structure, jouent un grand rôle lors de l'étude aux états limites. On présente donc ici cette notion de contraintes résiduelles, en précisant l'origine. C'est en s'intéressant à l'unicité de la solution en  $\boldsymbol{\sigma}$  sous un chargement final donné que l'on comprend l'intérêt des contraintes résiduelles. On ne prétend pas donner une démonstration rigoureuse de la nécessité d'introduire ces contraintes, mais simplement donner l'idée rendant cette introduction naturelle. Pour plus de détails, le lecteur est invité à se reporter au texte de HUNTER *et al.* (1960). L'idée est donc la suivante : pour montrer que, sous réserve de connaître le champ de déformations plastiques, la solution en  $\boldsymbol{\sigma}$  sous un chargement final donné est unique, on suppose le contraire, c'est-à-dire que deux solutions,  $\boldsymbol{\sigma}^1$  et  $\boldsymbol{\sigma}^2$ , existent, différentes et non nulles. La différence entre ces deux champs, chacun en équilibre avec les mêmes sollicitations extérieures, est donc un champ de contraintes auto-équilibré. Or, en appliquant le principe des travaux virtuels (II.6) à  $\boldsymbol{\sigma}^1 - \boldsymbol{\sigma}^2$ , associé à la différence compatible  $\boldsymbol{\varepsilon}^{e,1} - \boldsymbol{\varepsilon}^{e,2}$ ,

on montre que forcément  $\sigma^1 = \sigma^2$ , à un champ de contraintes résiduelles près, ce qui achève la démonstration d'unicité. Une façon de représenter alors cette unicité, est de partitionner le champ de contraintes  $\sigma$  en un champ purement élastique  $\sigma^{(e)}$ , qui correspond de manière unique aux sollicitations imposées, et en un champ de contraintes auto-équilibrées –dites résiduelles– noté  $\rho$ . On a donc :

$$\sigma = \sigma^{(e)} + \rho \quad (\text{II.15})$$

où  $\sigma^{(e)}$  est le champ de contraintes qui apparaîtrait dans le milieu s'il se comportait purement élastiquement une fois soumis aux mêmes sollicitations que le milieu réel. Ceci nécessite donc l'introduction d'un milieu de référence, noté  $\Omega^{(e)}$ , qui possède les mêmes caractéristiques géométriques et élastiques que le milieu  $\Omega$  (figure II.2). Dès lors, en injectant (II.15) dans (II.7), tout

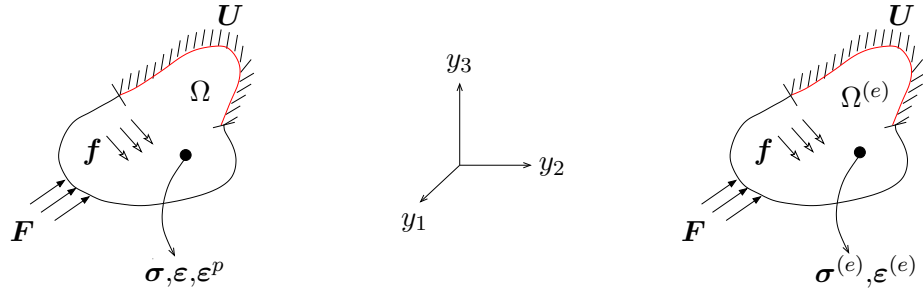


FIGURE II.2 – Milieu réel  $\Omega$  et milieu de référence  $\Omega^{(e)}$

en tenant compte de la loi de HOOKE (II.8), on obtient une nouvelle partition de la déformation totale :

$$\epsilon = \epsilon^{(e)} + \epsilon^{(r)} + \epsilon^p \quad (\text{II.16})$$

Le premier terme  $\epsilon^{(e)}$  représente le champ de déformations purement élastiques, compatible avec le champ de déplacements  $u^{(e)}$  qui apparaîtrait dans le milieu de référence  $\Omega^{(e)}$  :

$$\epsilon^{(e)} = S : \sigma^{(e)} = \text{grad}_s u^{(e)} \quad (\text{II.17})$$

Et les deux derniers termes,  $\epsilon^{(r)}$  et  $\epsilon^p$ , définissent un champ de déformations compatible avec le déplacement résiduel  $u^r$  tel que  $u = u^{(e)} + u^r$  :

$$\epsilon^{(r)} + \epsilon^p = \text{grad}_s u^r \quad (\text{II.18})$$

où :

$$\epsilon^{(r)} = S : \rho \quad (\text{II.19})$$

On remarque donc que les déformations élastiques  $\epsilon^{(r)}$ , issues des contraintes résiduelles d'après l'inverse de la loi de HOOKE, servent à rendre la somme  $\epsilon^{(r)} + \epsilon^p$  compatible. En effet, les déformations plastiques  $\epsilon^p$ , prises seules, sont incompatibles, en ce sens qu'elles sont associées à des déplacements ne satisfaisant pas (II.3). La somme est donc rendue compatible, uniquement grâce à l'addition du terme supplémentaire  $\epsilon^{(r)}$ , faisant intervenir les contraintes résiduelles  $\rho$  d'après (II.19). C'est donc là l'origine et l'intérêt majeur de l'utilisation des contraintes résiduelles (et de la décomposition (II.15)) en élastoplasticité.

## II.2 Les différents types de comportements d'une structure élastoplastique sous chargements variables

Le cadre d'application des théorèmes aux états limites et les définitions nécessaires à la bonne compréhension de ce chapitre ayant été introduits, on présente maintenant en détail le comportement d'une structure constituée de matériaux élastiques parfaitement plastiques et soumise à un chargement variable. Ce chargement, noté  $\mathcal{P}(t)$ , peut représenter l'une des sollicitations du paragraphe II.1.1 ou bien toute combinaison admissible<sup>2</sup> de ces sollicitations. On suppose de plus que  $\mathcal{P}$  évolue au cours du temps dans un domaine bien déterminé que l'on note  $\mathcal{D}$ . Il a été montré (KÖNIG, 1987), à partir de résultats expérimentaux, que dans ce type de situation, une structure est susceptible de développer cinq types de réponses.

### II.2.1 Réponse purement élastique

Si le chargement imposé reste suffisamment faible, de façon à ce que la contrainte seuil d'élasticité ne soit dépassée en aucun point de la structure, alors les seules déformations qui se développent dans la structure sont des déformations réversibles, dérivant de déplacements eux-mêmes réversibles (figure (II.3)). On a alors :

$$\forall \mathbf{y} \in \Omega, \quad \varepsilon^p = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \rho = \mathbf{0} \quad (\text{II.20})$$

L'énergie dissipée plastiquement est donc nulle et le bon fonctionnement de la structure n'est pas altéré. Cependant, comme évoqué dans le premier chapitre, la structure est fiable mais ses capacités de résistance ne sont alors pas exploitées au mieux.

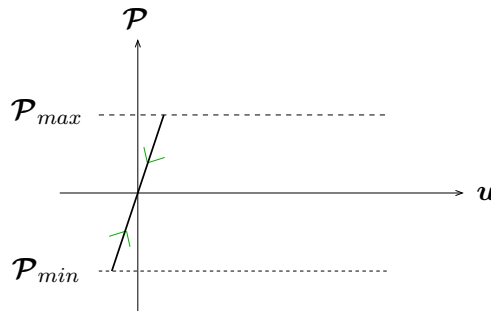


FIGURE II.3 – Réponse purement élastique

### II.2.2 Effondrement instantané par écoulement illimité

Le deuxième type de réponse est basé sur la remarque suivante : les matériaux constitutifs de la structure étant supposés élastoplastiques parfaits, les contraintes en chaque point de la structure

2. On entend par "admissible" que l'on peut imposer, en même temps, deux sollicitations de nature différente, uniquement sur des parties différentes du milieu.

ne peuvent donc pas dépasser la limite d'élasticité. Ceci implique donc que les sollicitations extérieures, à l'origine de ces contraintes ponctuelles, ne peuvent pas non plus dépasser une certaine limite. De fait, quand ces sollicitations atteignent, de façon monotone, cette valeur critique, communément appelée *chargement limite* (cf. paragraphe I.1.2), alors la capacité de résistance de la structure est instantanément dépassée. Ceci se traduit par le déclenchement, sous chargement constant, d'un écoulement plastique illimité conduisant inévitablement à la ruine plastique de la structure. Dans ce cas, on a :

$$\exists \mathbf{y} \in \Omega, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \neq \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\boldsymbol{\rho}} \neq \mathbf{0} \quad (\text{II.21})$$

Pour faire le lien avec le chapitre I, c'est par la théorie de l'analyse limite que l'on étudie ce type de réponse, afin de déterminer ledit chargement limite. Cependant, on précise que, vu le cadre d'application, c'est-à-dire les petites transformations de la configuration initiale, l'analyse limite ne saurait rendre entièrement compte de ce phénomène de ruine : elle se contente donc de donner la valeur critique  $\mathcal{P}_{lim}$  à ne pas dépasser afin de ne pas enclencher le phénomène.

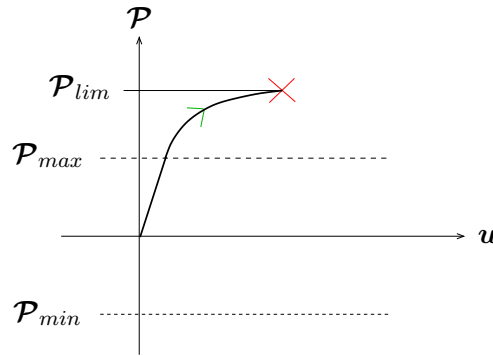
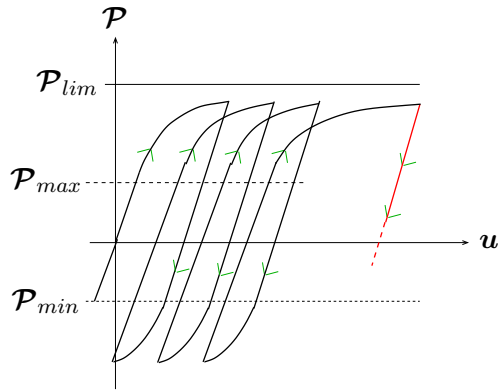


FIGURE II.4 – Ruine plastique instantanée

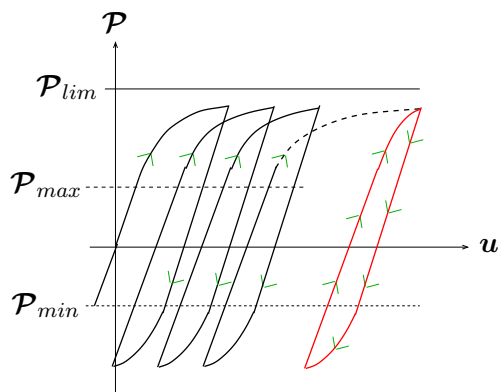
### II.2.3 Effondrement incrémental par accumulation de déformations plastiques

Par opposition au caractère instantané de la ruine précédente, le phénomène mis en cause ici, connu sous le nom de *rochet*, aboutit à une ruine incrémentale de la structure. En effet, dans ce cas le chargement limite n'est jamais atteint, mais il existe au moins un point de la structure, pour lequel les incréments de déformations plastiques, de même signe, s'accumulent au cours du chargement. L'équation (II.21) vaut donc également dans ce cas. Il en résulte, au bout d'un certain temps, une importance telle des déformations et déplacements totaux, que la structure perd sa forme initiale et devient inutilisable. Le comportement, au point concerné, est représenté figure II.5 : il ne présente aucune stabilisation. L'énergie dissipée plastiquement augmente donc sans limite avec le temps, ce qui conduit à une rupture incrémentale de la structure.

FIGURE II.5 – *Phénomène de rochet : ruine plastique incrémentale*

#### II.2.4 Plasticité alternée et fatigue oligocyclique

Le troisième type de réponse, permettant de conclure à la non stabilité de la structure, est le phénomène d'*accommodation* (encore appelé *plasticité alternée*). Dans ce cas comme dans le cas précédent, la limite d'élasticité des matériaux est dépassée mais le chargement limite n'est pas atteint. On suppose par contre que les sollicitations sont telles que les incréments de déformations plastiques changent de signe au cours du chargement. Il existe alors des points de la structure où les effets de ces incréments s'annulent et où la déformation totale reste petite. Bien que les déplacements soient bornés, la plastification ne cesse pas pour autant d'évoluer, ce qui rend (II.21) encore valide. La structure va alors rompre du fait de la plasticité alternée, suite à un phénomène de fatigue à faible nombre de cycles, localisé sur les points les plus contraints. Le comportement correspondant est représenté sur la figure II.6. On remarque donc que la réponse

FIGURE II.6 – *Plasticité alternée : ruine par fatigue*

finale se stabilise, mais en un cycle élastoplastique d'aire non nulle, ce qui implique une énergie dissipée plastiquement non bornée, et explique, associé aux changements de signe des incréments, le phénomène de rupture par fatigue.

### II.2.5 Adaptation par stabilisation des déformations plastiques

Enfin, le dernier type de réponse, et non le moindre puisque c'est celui qui nous intéresse en priorité, est le phénomène d'*adaptation*. Outre les quatre premiers cas de figure, il se peut donc aussi qu'après un certain temps (qui, pratiquement, peut être matérialisé par un certain nombre de cycles de chargements), les déformations plastiques, ainsi que les contraintes résiduelles, cessent complètement d'évoluer dans la structure :

$$\forall \mathbf{y} \in \Omega, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\epsilon}^p \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\rho} \rightarrow \mathbf{0} \quad (\text{II.22})$$

Comme le montre la figure II.7, après une phase élastoplastique, tous les points retrouvent alors un comportement purement élastique. L'énergie dissipée est donc bornée à l'énergie dissipée pendant la phase plastique, ce qui assure la fiabilité de la structure étudiée.

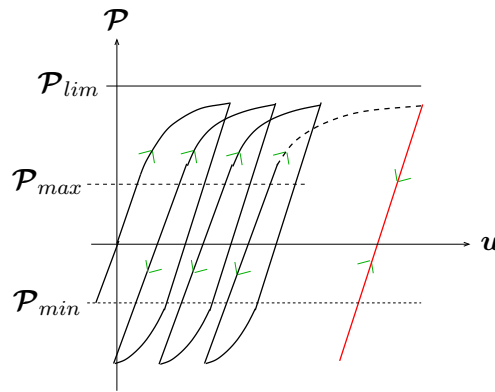


FIGURE II.7 – *Phénomène d'adaptation*

## II.3 Mise en évidence du phénomène d'adaptation

Comme le précise le chapitre I, quelques chercheurs intéressés par les applications de la théorie de la plasticité, se sont attelés tout d'abord à mettre en évidence le phénomène d'adaptation, puis à valider les résultats fournis par les calculs théoriques. Les premiers travaux apparaissent dès les années 50 et sont, bien évidemment, expérimentaux. Ils seront ensuite suivis, grâce au développement des techniques informatiques, par de nombreuses validations numériques. En ce sens, l'objet de ce paragraphe est de présenter :

- une expérience typique, réalisée à l'Université de Hannover (KÖNIG, 1987),
- un raisonnement analytique sur une poutre en flexion pure, illustrant la notion de contraintes résiduelles,
- une simulation numérique des différents comportements pouvant se développer dans une poutre encastree sollicitée en flexion.

### II.3.1 Etude expérimentale de KÖNIG

L'expérience brièvement résumée ci-après permet non seulement de mettre en évidence le phénomène d'adaptation mais également de donner une estimation du chargement conduisant à l'adaptation.

#### II.3.1.a Portique élastoplastique et chargement imposé

La structure étudiée est un portique en acier constitué de poutres élastoplastiques à sections rectangulaires (figure II.8). Le portique est sollicité cycliquement par deux forces concentrées  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ , chacune variant entre les bornes 0 et  $P$ . On a représenté sur la même figure un cycle de chargements qui est décomposé en quatre phases :

- dans un premier temps, la sollicitation est uniquement verticale, d'intensité maximale  $P$  :  $\mathcal{P}_1 = 0$  et  $\mathcal{P}_2 \in [0, P]$ ,
- puis elle devient horizontale :  $\mathcal{P}_1 \in [0, P]$  et  $\mathcal{P}_2 = P$ ,
- puis elle redevient verticale :  $\mathcal{P}_1 = P$  et  $\mathcal{P}_2 \in [P, 0]$ ,
- et enfin, elle s'annule :  $\mathcal{P}_1 \in [P, 0]$  et  $\mathcal{P}_2 = 0$ .

Les deux charges indépendantes  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  étant limitées dans leur amplitude, leur variations définissent donc le domaine de chargements  $\mathcal{D}$ .

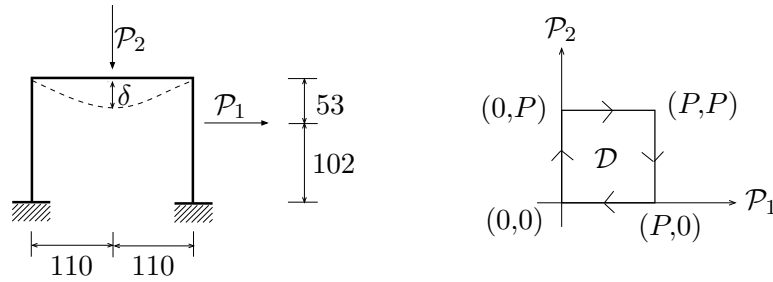


FIGURE II.8 – Portique en acier et cycle de chargements (d'après KÖNIG (1987))

#### II.3.1.b Protocole expérimental et observations

Afin de mettre en évidence le phénomène, plusieurs séries de mesures ont été réalisées, différentes les unes des autres de par la valeur de  $P$ . On reporte sur le graphe II.9 les résultats obtenus par les expérimentateurs, c'est-à-dire le déplacement résiduel vertical  $\delta$  (figure II.8), en fonction du nombre de cycles, pour différentes intensités maximales : 225 N (courbe (a)), 275 N (courbe (b)), 295 (courbe (c)) et 325 N (courbe (d)). La valeur de  $\delta$  est relevée lors de la dernière phase de chaque cycle. On remarque donc, en observant la courbe (a), que pour une intensité de chargement de 225 N, la réponse de la structure se stabilise au bout d'environ 2 cycles, après lesquels plus aucun déplacement résiduel ne prend naissance dans la structure. Pour une intensité de 50 N, puis de 70 N plus élevée (courbes (b) et (c)), la stabilisation prend de plus en plus de temps et les déplacements résiduels avant stabilisation sont de plus en plus importants.

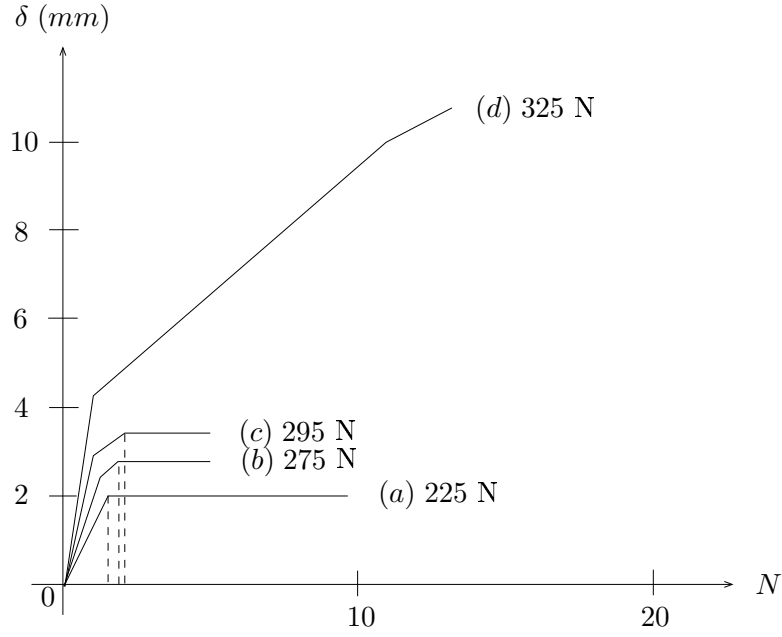


FIGURE II.9 – Déplacement  $\delta$  en fonction du nombre de cycles  $N$  pour différentes valeurs de  $P$  (d'après KÖNIG (1987))

Enfin, la dernière courbe (courbe (d)) ne présente aucune stabilisation, ce qui signifie donc que les déplacements résiduels augmentent sans limite avec le nombre de cycles, et conduit donc à penser que le chargement limite à l'adaptation a été dépassé, entraînant alors la structure dans un processus de rupture incrémentale, si le chargement limite n'a pas été dépassé. La dernière intensité ayant conduit à une stabilisation du déplacement résiduel fournit donc une borne inférieure du chargement à l'adaptation de 295 N, alors que la première intensité ayant conduit à la non stabilisation fournit, elle, une borne supérieure de ce chargement limite de 325 N. A l'issue de cette expérience, les expérimentateurs ont donc atteint leurs deux objectifs :

- mettre en évidence le phénomène d'adaptation, en montrant, par des augmentations successives de l'intensité des chargements, qu'il existe un chargement critique faisant basculer la structure d'un état stabilisé vers un état instable<sup>3</sup>,
- donner un encadrement de cette valeur critique  $P_{exp}^{adap}$  :

$$295 \text{ N} \leq P_{exp}^{adap} \leq 325 \text{ N} \quad (\text{II.23})$$

L'ultime vérification des expérimentateurs fut alors de réaliser le calcul théorique de cette valeur critique<sup>4</sup>, pour laquelle ils trouvèrent :

$$P_{th}^{adap} = 305 \text{ N}, \quad (\text{II.24})$$

3. On emploie ici les termes *stable* et *instable* par référence à l'existence, ou non, dans la structure, de déformations plastiques évoluant sans limite au cours des cycles.

4. Les méthodes de calcul sont détaillées dans KÖNIG (1987).



ce qui finit de corroborer le théorique par l'expérimental. De plus, il a été montré (KÖNIG, 1987) qu'il était légitime de considérer des chargements cycliques, et surtout de ne considérer qu'un seul type de cycle : celui présenté sur la figure II.8. En effet, l'auteur a montré, en exploitant la convexité de la surface seuil et le fait que le domaine de chargements soit borné, que si une structure s'adapte sous l'action d'un trajet de chargements contenant tous les sommets du domaine de chargements  $\mathcal{D}$ , alors elle s'adapte pour tout trajet contenu dans ce domaine. Le fait de considérer un trajet de chargements cyclique n'est donc pas limitatif, si tant est que le cycle passe par les sommets du polyèdre définissant le domaine de chargements.

### II.3.2 Etude analytique d'une poutre en flexion pure

Afin de mieux appréhender les notions de contraintes résiduelles et de corps élastique de référence présentés au paragraphe II.1.3, on présente ici l'étude analytique d'une poutre en flexion pure.

#### II.3.2.a Position du problème

On choisit une poutre rectiligne de section rectangulaire droite et constante, constituée d'un matériau élastoplastique parfait, encastree à l'une de ses extrémités et sollicitée en flexion pure à son autre extrémité par un moment de flexion  $\mathbf{M}$ . On suppose que la fibre moyenne de la poutre est portée par l'axe de la poutre  $y_1$  et l'on note  $S_{y_1^*}$  la section de centre  $(y_1^*, 0, 0)$ . Les hy-

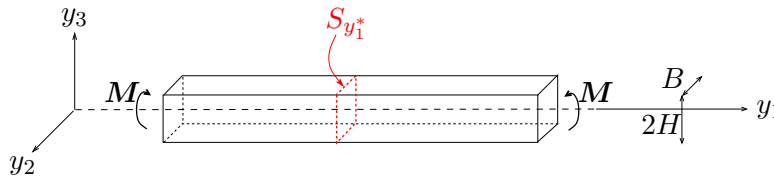


FIGURE II.10 – Poutre encastree de section rectangulaire

pothèses du paragraphe II.1 sont toujours valables, mais on leur adjoint ces quelques hypothèses supplémentaires, afin de se placer dans le cadre de l'hypothèse de BERNOUILLI :

#### HYPOTHÈSE II.1

- les sections droites (par exemple la section  $S_{y_1^*}$  de la figure II.10) restent droites au cours de la déformation,
- elles se déforment librement, dans la limite des hypothèses du paragraphe II.1, dans leur plan, c'est-à-dire que  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0$ ,
- on suppose la validité de ces relations d'ordre :  $|\sigma_{11}| \gg |\sigma_{12}|$  et  $|\sigma_{11}| \gg |\sigma_{13}|$ ,
- la déformée des sections droites est orthogonale à la déformée de la fibre moyenne.

### II.3.2.b Illustration de la notion de contraintes résiduelles

Afin d'illustrer la notion de contraintes résiduelles, on donne<sup>5</sup> et représente graphiquement les contraintes dans une section donnée, en fonction de l'altitude  $y_3$  du point de la section et de l'intensité du moment appliqué  $M$ .

Pour ce faire, on exprime tout d'abord le champ de déplacements  $\mathbf{u}$  : travaillant en flexion pure, on néglige la composante longitudinale du déplacement, ce qui nous amène à poser :

$$\mathbf{u}(y_1, y_3) = -y_3 w'(y_1) \mathbf{e}_1 + w(y_1) \mathbf{e}_3 \quad (\text{II.25})$$

où  $w$  et  $w'$  désignent respectivement la flèche et la dérivée de la flèche de la fibre moyenne. La déformation de courbure de la fibre moyenne, classiquement utilisée en théorie des poutres, est quant-à-elle définie à partir de la dérivée seconde de la flèche, notée  $w''$  :

$$k = -w'' \quad (\text{II.26})$$

De plus, les hypothèses II.1 impliquent que les efforts sont essentiellement portés par l'axe moyen de la poutre : les tenseurs de déformations et de contraintes sont donc réduits à leur seule composante 11, respectivement notée  $\varepsilon$  et  $\sigma$ . La déformation totale  $\varepsilon$  est donc donnée par :

$$\varepsilon(y_3) = y_3 k \quad (\text{II.27})$$

#### ■ Détermination des contraintes $\sigma$ dans le domaine élastique

Afin de déterminer la répartition de contraintes dans le cadre de l'élasticité, on injecte dans

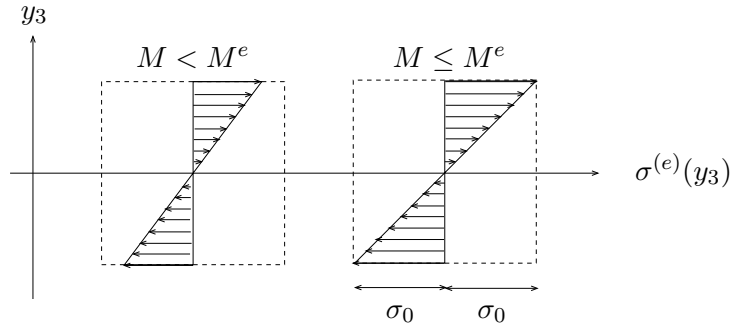


FIGURE II.11 – Contraintes élastiques en fonction du moment appliqué et de l'altitude dans une section  $S_{y_1^*}$

un premier temps (II.27) dans la loi de HOOKE obtenue par (II.8), puis on utilise la loi de comportement en flexion<sup>6</sup> de la poutre, reliant le moment de flexion  $M$  à la déformation de

5. L'objectif étant de donner une représentation graphique des contraintes résiduelles, on ne donnera pas de démonstration très détaillée des relations liant contraintes (resp. déformations) et altitude d'un point de la section.

6. La démonstration de l'obtention de cette loi est exposée en annexe B.

courbure  $k$ . En notant  $E^Y$  le module de YOUNG de la poutre et  $I$  le moment quadratique de sa section, on a alors :

$$\begin{cases} \sigma(y_3) = E^Y \varepsilon(y_3) = E^Y y_3 k \\ M = E^Y I k, \text{ avec } I = \frac{2}{3} B H^3 \end{cases} \Rightarrow \sigma(y_3) = \frac{3M}{2BH^3} y_3 \quad (\text{II.28})$$

#### ■ Détermination des déformations plastiques

Si l'on note la contrainte seuil  $\sigma_0$ , les premières zones de la poutre à plastifier étant les peaux inférieures et supérieures d'altitudes respectives  $-H$  et  $H$ , on peut alors évaluer le moment limite d'élasticité, noté  $M^e$ , à partir duquel des déformations plastiques commenceront à se développer dans la poutre :

$$M^e = \frac{2}{3} \sigma_0 B H^2 \quad (\text{II.29})$$

On représente alors sur la figure II.11 la répartition de contraintes élastiques à  $y_1^*$  quelconque, c'est-à-dire pour une section  $S_{y_1^*}$  quelconque, en fonction de l'altitude  $y_3$ . A partir du moment où le processus de plastification est enclenché, plus la valeur de  $M$  augmente, plus la zone plastifiée se propage dans la poutre, des peaux vers l'intérieur. On montre alors que la zone encore élastique de la section a une épaisseur de  $2y_3^p$  où  $y_3^p$  est donné par (II.30) en fonction de la courbure  $k$ , elle même fonction de  $M$ , selon la loi d'écrouissage (II.31)<sup>7</sup> :

$$y_3^p = \eta H \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{\sigma_0}{E^Y k H} \quad (\text{II.30})$$

$$M = \sigma_0 B H^2 \left[ 1 - \frac{1}{3} \eta^2 \right] \quad (\text{II.31})$$

Les déformations plastiques, quant-à-elles, évoluent de la façon suivante :

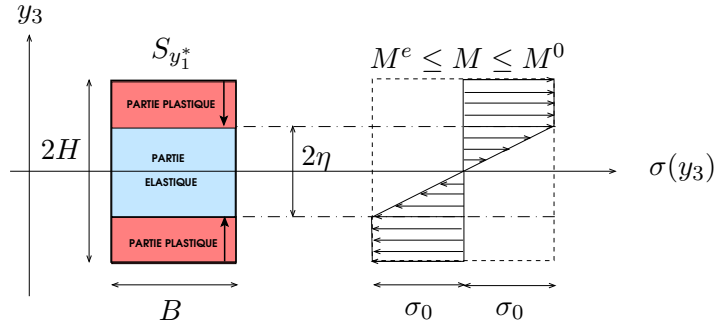
$$\varepsilon^p(y_3) = \begin{cases} -\frac{\sigma_0}{E^Y} \left( \frac{y_3}{\eta H} - 1 \right) & \text{pour } \eta H \leq y_3 \leq H \\ 0 & \text{pour } -\eta H \leq y_3 \leq \eta H \\ \frac{\sigma_0}{E^Y} \left( \frac{y_3}{\eta H} - 1 \right) & \text{pour } -H \leq y_3 \leq -\eta H \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

On représente alors l'évolution de la plastification, en fonction de l'altitude et pour une valeur de  $M$  fixée, supérieure à  $M^e$  mais inférieure au moment limite  $M^0$  (on montre à l'annexe B que  $M^0 = \sigma_0 B H^2$ ), défini comme étant le moment induisant la rupture instantanée présentée figure II.4.

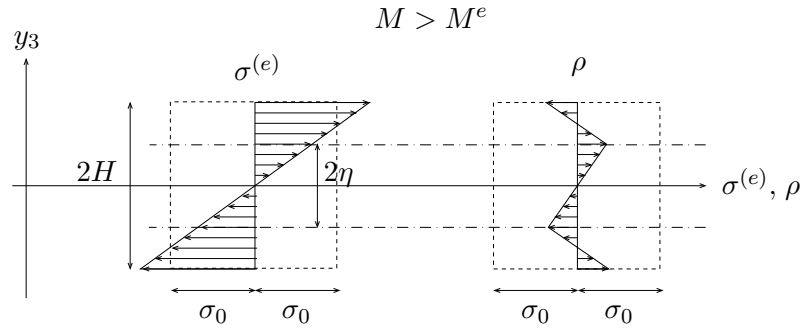
#### ■ Représentation graphique des contraintes résiduelles

Si maintenant le moment appliqué prend des valeurs variant cycliquement entre 0 et  $M^p$ , avec  $M^e < M^p < M^0$ , alors les déformations plastiques apparaissent dès le premier cycle selon (II.32). Par contre, KÖNIG explique que réaliser un deuxième cycle, c'est-à-dire décharger totalement puis recharger jusqu'à la même limite  $M^p$ , n'engendre pas de nouvelle plastification. La structure s'est donc adaptée du fait de la présence de déformations plastiques et de contraintes résiduelles.

7. Toutes ces relations sont démontrées en annexe B.

FIGURE II.12 – *Plastification progressive d'une section  $S_{y_1^*}$* 

On peut alors représenter graphiquement ces contraintes résiduelles (figure II.13<sup>8</sup>), qui une fois superposées aux contraintes purement élastiques, selon (II.15), constituent un état de contraintes admissible. On retrouve donc bien, sur cette figure, le fait que l'état de contraintes réel régnant

FIGURE II.13 – *Contraintes purement élastiques et contraintes résiduelles dans la section  $S_{y_1^*}$* 

dans la structure (représenté sur la figure II.12) peut être reconstitué à partir de la superposition des contraintes purement élastiques et des contraintes résiduelles. Comme nous le verrons au chapitre IV, lors de la résolution numérique d'un problème d'adaptation, l'objectif est donc de trouver un profil de contraintes résiduelles qui, à la fois, induise  $M = 0$  et compense la réponse de la structure si elle était supposée purement élastique. KÖNIG affirme également que, si l'intensité du moment appliqué cycliquement excède  $\frac{4}{3} \sigma_0 B H^2$ , alors le phénomène de plasticité alternée se développera dans la poutre. Cette dernière affirmation sera mise en évidence au paragraphe suivant.

### II.3.3 Etude numérique d'une poutre en flexion

L'intérêt des contraintes résiduelles ayant été mis en évidence, l'objectif de ce nouveau paragraphe est de présenter, grâce à des simulations numériques réalisées sous le logiciel éléments finis ABAQUS, l'aspect énergétique associé aux types de réponses paragraphe II.2. En effet, cinq

8. Sur cette figure, les contraintes dépendent toujours du point  $(y_1^*, y_3)$ . Cependant, pour simplifier la figure, on omet cette dépendance dans la notation : on représente donc  $\sigma^{(e)}(y_1^*, y_3)$  par  $\sigma^{(e)}$  et  $\rho(y_1^*, y_3)$  par  $\rho$ .

types de réponses ont été présentés, que l'on peut classer en deux grandes classes si l'on se place d'un point de vue énergétique :

- les réponses conduisant à un état fiable de la structure, en ce sens que l'énergie dissipée plastiquement au cours du chargement est nulle ou bornée : l'élasticité et l'adaptation,
- les réponses entraînant la ruine de la structure par dissipation plastique illimitée : la rupture instantanée, le phénomène de rochet et le phénomène d'accommodation.

Mis à part le cas bien connu de l'élasticité, on s'attache donc ici à donner une interprétation graphique des relations (II.22) et (II.21). Pour ce faire, on choisit d'étudier un type de comportement de chacune des deux classes citées ci-avant : l'adaptation pour mettre en évidence (II.22) et l'accommodation pour mettre en évidence (II.21). Souhaitant attirer l'attention du lecteur sur *l'aspect* des courbes présentées plutôt que sur *les valeurs numériques* atteintes par ces courbes, les résultats de ce paragraphe restent volontairement qualitatifs.

### II.3.3.a Position du problème

On considère donc une poutre de section carrée, encastree à son extrémité gauche et sollicitée par un déplacement vertical cyclique à son extrémité droite (figure II.10). Le chargement est appliqué selon le trajet de la figure II.14, avec une intensité de déplacement  $U_{max}$  plus ou moins importante, selon le phénomène à mettre en évidence. On réalise donc plusieurs séries de

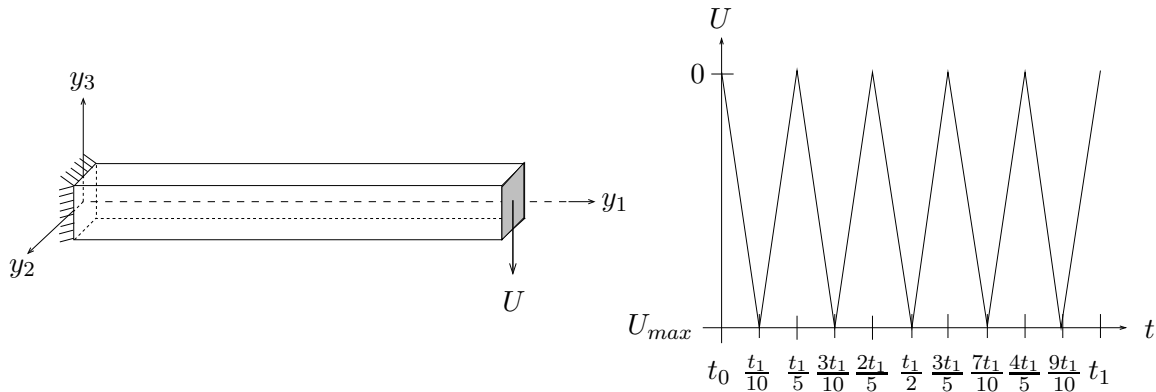


FIGURE II.14 – Poutre étudiée et déplacement cyclique imposé

simulations  $s_i$ , définies par différentes valeurs de  $U_{max}$ , en vue de représenter les phénomènes attendus.

### II.3.3.b Représentation numérique et interprétation énergétique des différents comportements observables

Pour chaque simulation  $s_i$ , on relève alors :

- l'évolution de la réaction à l'encastrement en fonction du temps,
- l'évolution de cette même réaction mais en fonction du déplacement imposé  $U$ ,

- l'évolution temporelle de l'énergie dissipée plastiquement par le modèle au cours du cycle de chargements.

■ *Mise en évidence de l'adaptation de la poutre*

Pour une certaine valeur de  $U_{max}$ <sup>9</sup>, les simulations numériques tendent à prouver les dires de KÖNIG. En effet, si l'on note  $R_3$  composante sur  $y_3$  de la réaction totale sur la section encastree  $S_0$ , alors la figure II.15 prouve que la poutre s'adapte puisque la courbe représentant les variations de  $R_3$  en fonction du déplacement imposé  $U$  a la même allure que la courbe de la figure II.7, présentant une réponse typique d'adaptation. De plus, n'étant pas évident sur la figure II.15,

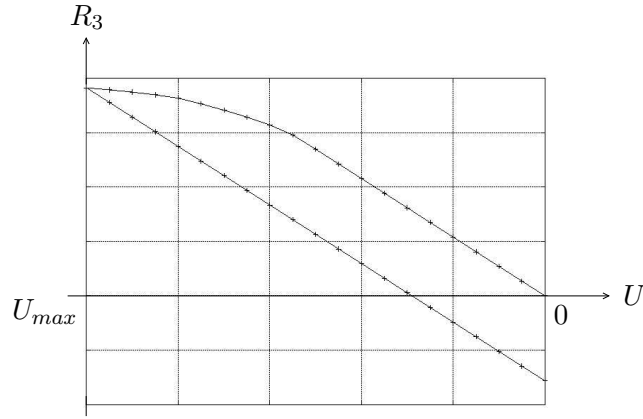


FIGURE II.15 – Evolution de la réaction  $R_3$  (sur  $S_0$ ) en fonction du déplacement imposé  $U$

sinon à regarder précisément les valeurs numériques, que la poutre se soit adaptée en un seul cycle, c'est-à-dire dans l'intervalle de temps  $[t_0, \frac{t_1}{5}]$ , on trace sur la figure II.16<sup>10</sup> les évolutions respectives de la réaction  $R_3$  et de l'énergie dissipée plastiquement, en fonction du temps. Il apparaît alors nettement sur cette figure que des déformations plastiques sont apparues dans la poutre durant le premier cycle, après lequel cette dernière a retrouvé un comportement purement élastique. En chaque point  $\mathbf{y}$  de la poutre, le travail dissipé plastiquement est donc borné au travail dissipé durant la phase de plastification. D'un point de vue global, ce fait caractéristique de l'adaptation implique donc que :

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_0^T \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p dV dt < \infty \quad (\text{II.33})$$

où  $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p dt = w(\mathbf{y})$  est le travail dissipé plastiquement par unité de volume au point  $\mathbf{y}$ .

9. Non précisée dans ce paragraphe à dessein qualitatif.

10. On garde la même convention que pour la figure II.12, à savoir que le rouge représente un intervalle de plastification et le bleu un intervalle d'élasticité.

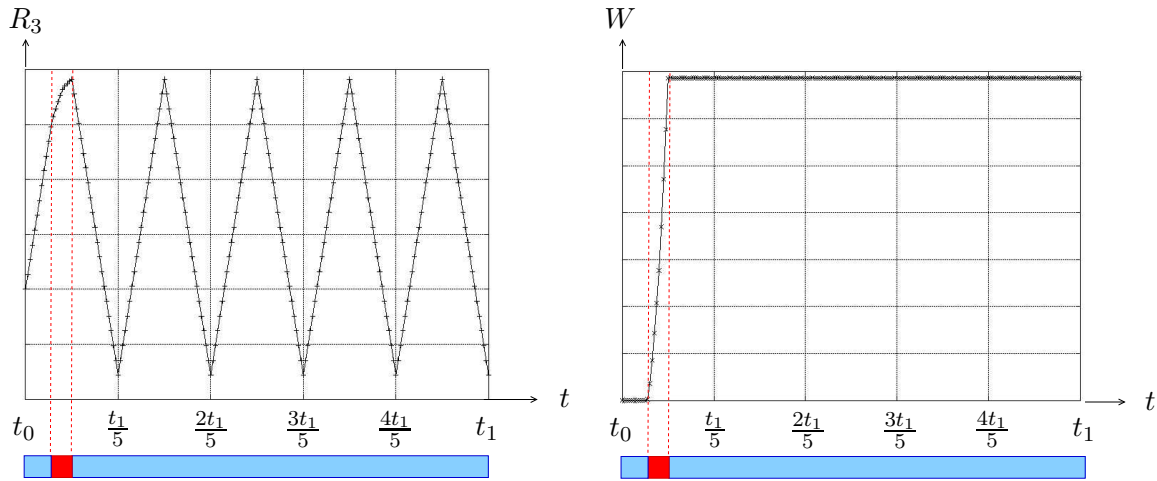


FIGURE II.16 – *Évolutions temporelles de la réaction sur la section  $S_0$  et de l'énergie dissipée plastiquement*

■ *Mise en évidence du phénomène d'accommodation*

On procède de même pour mettre en évidence l'un des phénomènes induisant la ruine de la

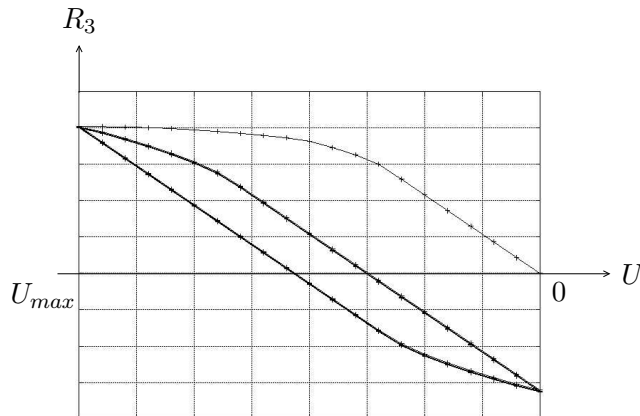


FIGURE II.17 – *Évolution de la réaction  $R_3$  (sur  $S_0$ ) en fonction du déplacement imposé  $U$*

structure: l'accommodation. Suivant la méthode de KÖNIG, on augmente progressivement la valeur de  $U_{max}$ , jusqu'à retrouver (figure II.17) un comportement du type de celui de la figure II.6. On remarque en effet qu'après une phase élastique, la réponse se stabilise bien en un cycle élastoplastique d'aire non nulle. Comme dans le cas précédent, on trace ensuite sur la figure II.18 les évolutions temporelles de la réaction  $R_3$  et de l'énergie dissipée plastiquement  $W$ . La fonction  $R_3 : t \rightarrow R_3(t)$ , non linéaire en début et en fin de chaque cycle, ne redevient donc jamais une fonction entièrement linéaire du temps. Ceci prouve que des déformations plastiques apparaissent en chaque début et fin de cycle, ce qui implique une énergie dissipée plastiquement non nulle: la poutre n'est plus adaptée. Cette constatation se retrouve sur la figure représentant  $W(t)$ : à chaque nouveau cycle, l'énergie augmente par palier d'un incrément  $2\Delta W$ . La variation d'énergie

$\Delta W$ , constante d'un cycle à l'autre, traduit, quant-à-elle, la stabilisation de la réponse en un cycle d'aire constante non nulle, correspondant au cycle de la figure II.17. Dans ce cas, la poutre dissipe sans limites et il existe donc au moins un point pour lequel cette dissipation n'est pas bornée :

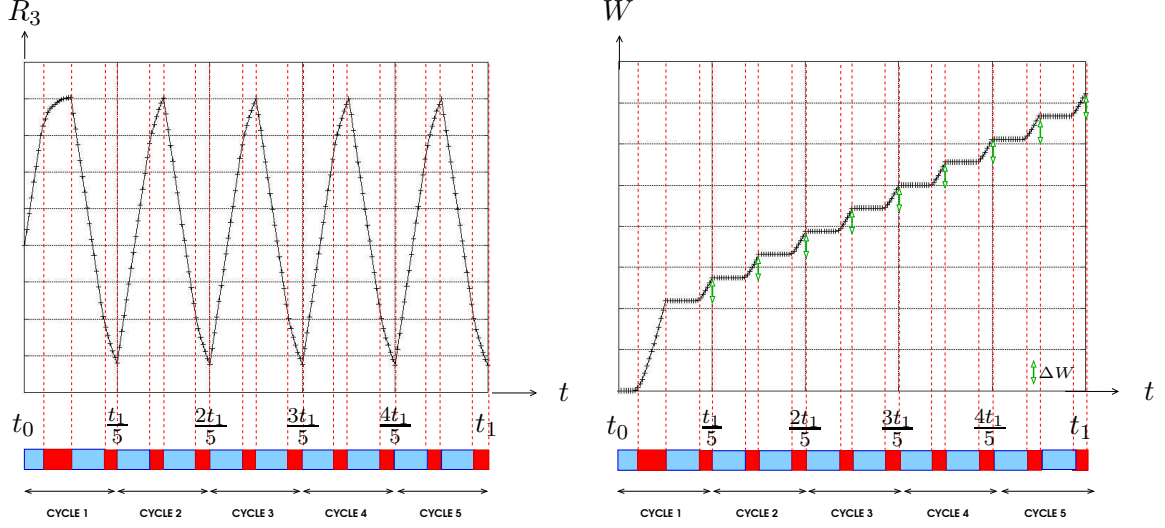


FIGURE II.18 – *Evolutions temporelles de la réaction sur la section  $S_0$  et de l'énergie dissipée plastiquement*

$$\exists \mathbf{y} \in \Omega, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} w(\mathbf{y}, T) = \int_0^{+\infty} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt \rightarrow +\infty \quad (\text{II.34})$$

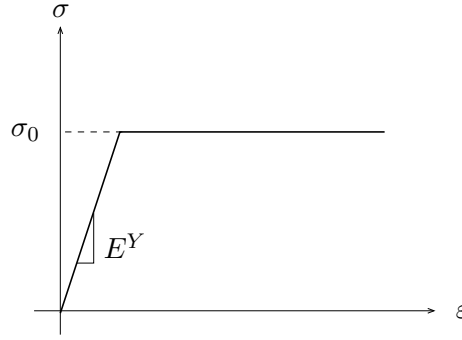
Cette propriété (II.34) de la dissipation est également caractéristique des phénomènes suivants : la rupture incrémentale par accumulation de déformations plastiques (figure II.4) et le rochet (figure II.5).

## II.4 Les deux théorèmes de base de la théorie de l'adaptation d'une structure

Après avoir présenté par l'exemple, fût-il expérimental, analytique ou numérique, les phénomènes pouvant se développer dans une structure soumise à un chargement variable, on énonce dans ce qui suit les deux théorèmes classiques de l'adaptation : le théorème de MELAN et le théorème de KOITER. En vue des applications ultérieures, les énoncés des deux théorèmes présentés concernent uniquement des structures composées de matériaux au comportement local élastoplastique parfait<sup>11</sup>. La figure II.19 représente ce comportement dans le cas d'une traction uniaxiale, où  $E^Y$  est le module de YOUNG du matériau considéré.

11. On appellera désormais ce type de structure, une structure élastoplastique parfaite.



FIGURE II.19 – *Comportement local élastoplastique parfait*

#### II.4.1 Théorème d'adaptation statique de MELAN

On considère donc une structure élastoplastique parfaite soumise un chargement  $\mathcal{P} : t \mapsto \mathcal{P}(t)$ , combinaison de  $n$  chargements  $(\mathcal{P}_1(t), \mathcal{P}_2(t), \dots, \mathcal{P}_n(t))$ , variant indépendamment les uns des autres mais dans des limites prescrites. Pour donner un exemple et se placer dans le cadre de travail défini au paragraphe II.1, le chargement  $\mathcal{P}(t)$ , noté  $\mathcal{P}$ , peut être :

$$\mathcal{P} = (\mathbf{f}, \mathbf{F}, \mathbf{U}) \quad (\text{II.35})$$

où chacune des sollicitations  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{U}$  dépend implicitement du temps et varie dans un domaine borné  $\mathcal{D}$ , du type de celui de la figure I.3.

Le théorème de MELAN (1938) –ou théorème d'adaptation statique de MELAN– énonce alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait adaptation de ladite structure.

##### THÉORÈME II.1

S'il existe un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps  $\bar{\rho} : \mathbf{y} \mapsto \bar{\rho}(\mathbf{y})$ , tel que :

$$\mathcal{F}(\sigma^{(e)}(\mathbf{y}, t) + \bar{\rho}(\mathbf{y})) \leq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega \text{ et } \forall \mathcal{P}(t) \in \mathcal{D}, \forall t$$

alors la structure élastoplastique parfaite s'adapte pour tous les chargements  $\mathcal{P} \in \mathcal{D}$ .

Les relations devant être vérifiées par le champ de contraintes purement élastiques  $\sigma^{(e)}$  et le champ de contraintes résiduelles  $\rho$ , seront données dans les deux paragraphes suivants (II.4.1.a et II.4.1.b). En d'autres termes, il y a adaptation de la structure s'il est possible de trouver un champ de contraintes résiduelles qui soit indépendant du temps et dont la superposition avec le champ de contraintes purement élastiques constitue un état de contraintes de sécurité<sup>12</sup> en tout point de la structure et pour tout trajet de chargements  $\mathcal{P}$  inclus dans  $\mathcal{D}$ .

12. Au sens de (II.9).

#### II.4.1.a Problème purement élastique

Comme représenté sur la figure II.2, le champ de contraintes purement élastiques  $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$  règne dans la structure de référence  $\Omega^{(e)}$  tout en étant en équilibre avec le chargement imposé à la structure réelle  $\Omega$ . En supposant que ces chargements soient du type (II.35), ce champ satisfait alors les relations suivantes (où  $\mathbf{C}$  est le tenseur des rigidités, inverse de  $\mathbf{S}$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} + \mathbf{f} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega^{(e)} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F} & \text{sur } \partial\Omega_F^{(e)} \\ \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{U} & \text{sur } \partial\Omega_U^{(e)} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} & \text{dans } \Omega^{(e)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \mathbf{grad}_s \mathbf{u}^{(e)} & \text{dans } \Omega^{(e)} \end{array} \right. \quad (\text{II.36})$$

#### II.4.1.b Problème aux contraintes résiduelles

De même, comme précisé au paragraphe II.1.3, le champ de contraintes résiduelles est auto-équilibré. Le théorème (II.1) lui imposant en outre d'être indépendant du temps, il satisfait donc aux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div} \bar{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \bar{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega_F \\ \dot{\bar{\boldsymbol{\rho}}} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\rho}}}{\partial t} = \mathbf{0} & \forall t \geq 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.37})$$

#### II.4.1.c Preuve du théorème de MELAN

Au risque d'alourdir quelque peu la présentation, on choisit de donner ici, et non en annexe, la preuve de ce théorème. L'intérêt principal de ce choix est de mettre en lumière le défaut, évoqué au paragraphe I.1.4, que présentait la démonstration première de MELAN. L'idée de base de la preuve est de considérer deux solutions du problème :

- la solution du problème d'élastoplasticité  $\boldsymbol{\sigma}$ , qui est l'état de contraintes réel au cours du trajet de chargements :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(e)} + \boldsymbol{\rho}, \quad (\text{II.38})$$

- la solution du problème d'adaptation  $\boldsymbol{\sigma}^s$ , qui est l'état de contraintes de sécurité :

$$\boldsymbol{\sigma}^s = \boldsymbol{\sigma}^{(e)} + \bar{\boldsymbol{\rho}}, \quad (\text{II.39})$$

On considère alors l'énergie de déformation élastique  $J(t)$ , associée à l'état de contraintes résiduelles  $\boldsymbol{\rho} - \bar{\boldsymbol{\rho}}$  :

$$J(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\rho} - \bar{\boldsymbol{\rho}}) : \mathbf{C}^{-1} : (\boldsymbol{\rho} - \bar{\boldsymbol{\rho}}) dV \quad (\text{II.40})$$

Le champ  $\bar{\boldsymbol{\rho}}$  étant indépendant du temps, la dérivée première de  $J$  par rapport au temps vaut :

$$\dot{J}(t) = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\rho} - \bar{\boldsymbol{\rho}}) : \mathbf{C}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\rho}} dV \quad (\text{II.41})$$

Ce qui, compte-tenu de (II.7) et de (II.19) devient :

$$\dot{J}(t) = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\rho} - \bar{\boldsymbol{\rho}}) : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{(e)} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) dV \quad (\text{II.42})$$

Or, le champ de contraintes  $\boldsymbol{\rho} - \bar{\boldsymbol{\rho}}$  étant auto-équilibré (en tant que différence de deux champs de contraintes eux-mêmes auto-équilibrés) et le champ de déformations  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{(e)}$  étant compatible (en tant que différence de deux champs de déformations eux-mêmes compatibles (cf. paragraphe II.1.3)), l'application du principe des travaux virtuels à ces différences donne donc que :

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\rho} - \bar{\boldsymbol{\rho}}) : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{(e)}) dV = 0 \quad (\text{II.43})$$

L'équation (II.42) devient alors :

$$\dot{J}(t) = - \int_{\Omega} (\boldsymbol{\rho} - \bar{\boldsymbol{\rho}}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p dV \quad (\text{II.44})$$

Soit, en tenant compte de (II.38) et (II.39) :

$$\dot{J}(t) = - \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^s) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p dV \quad (\text{II.45})$$

Le matériau étant supposé obéir au principe du travail maximal de HILL (équation (II.9)), l'expression (II.44) ne peut donc être que négative dès que des déformations plastiques se développent dans la structure au cours du trajet de chargements. L'énergie de déformation élastique  $J$  est donc décroissante. Or, en temps que forme quadratique de la déformation, elle ne peut être que positive. On a donc :

$$0 \leq J(t) \leq J(0) \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{II.46})$$

A partir de ce point, la démonstration première de MELAN consiste en l'affirmation suivante : l'énergie  $J$  étant décroissante et ne pouvant devenir négative, elle doit donc s'annuler au bout d'un certain temps  $T$ , ce qui entraîne également l'annulation de  $\dot{J}$  pour tout temps supérieur au temps  $T$ . Finalement,  $\dot{J}$  résultant du produit entre le champ non nul  $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^s$  et le champ des taux de déformations  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ , ce dernier s'annule forcément après le temps  $T$  en question. Ceci signifie donc que, dès que la structure s'adapte, les déformations plastiques cessent d'évoluer et la réponse à tout chargement supplémentaire redevient alors purement élastique.

## II.4.2 Coefficient de sécurité à l'adaptation

Cependant, la fin de la preuve prise d'un point de vue strictement mathématique a été mise en défaut par DÉBORDES et NAYROLES (1976), qui montrèrent alors qu'il suffisait que les propriétés suivantes soient vérifiées pour qu'il y ait adaptation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{J}(t) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{J}(t) < 0 \quad \forall t \geq 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} J(t) = c \quad \text{et} \quad J(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \\ \text{et donc} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{y}, t) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega \end{array} \right. \quad (\text{II.47})$$

où  $c$  est une constante positive. De même, la démonstration de MELAN, finalisée par (II.47), prouve effectivement que lorsqu'une structure s'adapte, les déformations plastiques en son sein cessent d'évoluer, mais ne permet en aucun cas d'avoir une idée de la valeur atteinte par les déformations plastiques accumulées dans la structure avant qu'elle n'atteigne son état adapté. C'est là l'intérêt majeur des travaux de DÉBORDES et NAYROLES (1976), qui associés aux travaux de KOITER (1960), permettent de contourner cet inconvénient par l'introduction d'un coefficient de sécurité à l'adaptation. Ceci permet en effet de borner, non pas les déformations plastiques accumulées, mais le travail dissipé plastiquement durant le trajet de chargements, ce qui correspond plus concrètement au critère intuitif (II.33). En effet, si l'on suppose qu'il est possible de trouver un coefficient  $\beta > 1$ , tel que l'état de contraintes :

$$\beta(\boldsymbol{\sigma}^{(e)} + \bar{\boldsymbol{\rho}}) \quad (\text{II.48})$$

soit un état de contraintes admissible<sup>13</sup> pour tout point  $\mathbf{y}$  de  $\Omega$  et pour tout chargement  $\mathcal{P}(t)$  inclus dans  $\mathcal{D}$ , alors on a :

$$(\boldsymbol{\sigma} - \beta\boldsymbol{\sigma}^s) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \geq 0 \quad \text{d'après (II.10)} \quad (\text{II.49})$$

Ce qui implique, en ajoutant et soustrayant  $\beta\boldsymbol{\sigma}$  au membre de gauche :

$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^s) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \geq \frac{\beta - 1}{\beta} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (\text{II.50})$$

et permet alors de borner l'expression de  $\dot{J}$  dans (II.44) :

$$\dot{J}(t) = - \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^s) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p dV \leq - \frac{\beta - 1}{\beta} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p dV \quad (\text{II.51})$$

On reconnaît alors au membre de droite, au facteur  $-\frac{\beta-1}{\beta}$  près, la dérivée de l'énergie dissipée plastiquement  $W$ . On a donc :

$$\dot{J}(t) \leq - \frac{\beta - 1}{\beta} \dot{W}(t) \quad (\text{II.52})$$

Soit, après inversion et intégration par rapport au temps :

$$W(t) \leq \frac{\beta}{\beta - 1} [J(0) - J(t)] \quad (\text{II.53})$$

C'est là que les travaux de KOITER, DÉBORDES et NAYROLES trouvent leur intérêt réciproque. En effet, KOITER montre, grâce à ce coefficient de sécurité, qu'en cas d'adaptation, l'énergie dissipée plastiquement est bornée par  $\frac{\beta}{\beta-1} [J(0) - J(t)]$ , et DÉBORDES et NAYROLES montrent, en corrigeant la preuve de MELAN, que cette même expression est aussi bornée puisqu'elle vérifie (II.47). Ce coefficient de sécurité à l'adaptation permet donc, non seulement d'affirmer que les déformations plastiques cessent d'évoluer quand la poutre s'est adaptée, mais également de borner l'énergie dissipée plastiquement avant d'atteindre cet état adapté.

---

13. au sens de (II.10).

Finalement, en injectant la définition de  $J$  dans (II.53), on a :

$$W(t) \leq \frac{\beta}{\beta - 1} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \bar{\rho} : C^{-1} : \bar{\rho} d\Omega \quad (\text{II.54})$$

Le travail dissipé plastiquement est donc borné par une quantité indépendante, et du temps, et du trajet de chargements. Ceci permet de reformuler le théorème de MELAN de la façon suivante :

### THÉORÈME II.2

S'il existe un coefficient de sécurité  $\beta > 1$  et un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps  $\bar{\rho} : \mathbf{y} \mapsto \bar{\rho}(\mathbf{y})$  satisfaisant  $\int_{\Omega} \bar{\rho} : C^{-1} : \bar{\rho} d\Omega < +\infty$ , tels que :

$$\mathcal{F} \left( \beta(\sigma^{(e)}(\mathbf{y}, t) + \bar{\rho}(\mathbf{y})) \right) \leq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega \text{ et } \forall \mathcal{P}(t) \in \mathcal{D}, \quad (\text{II.55})$$

alors la structure élastoplastique parfaite s'adapte pour toutes les histoires de chargements  $\mathcal{P}(t) \in \mathcal{D}$ .

Dans ce théorème, les champs de contraintes purement élastiques et résiduelles satisfont toujours les systèmes (II.36) et (II.37).

### II.4.3 Théorème d'adaptation cinématique de KOITER

En vue de résoudre des problèmes d'adaptation par l'approche cinématique, on présente le deuxième théorème classique de l'adaptation : le théorème cinématique ou théorème de KOITER, dual de celui de MELAN et fournissant un critère de non-adaptation (KÖNIG, 1987).

On introduit, avant d'énoncer le théorème, la notion préliminaire de cycle admissible de taux de déformations plastiques. Pour ce faire, soit  $[0, T]$  un intervalle de temps quelconque. Un cycle admissible de taux de déformations plastiques,  $\dot{\hat{\epsilon}}^p$ , est défini par le fait que les incréments de déformations plastiques<sup>14</sup> lors d'un tel cycle sont des incréments compatibles avec les incréments de déplacements, notés  $\hat{\mathbf{u}}$ , cinématiquement admissibles à zéro, et de trace nulle. En d'autres termes, ils dérivent d'incrément de déplacements selon la relation (II.3) :

$$\begin{cases} \hat{\epsilon}^p(\mathbf{y}) = \int_0^T \dot{\hat{\epsilon}}^p(\mathbf{y}, t) dt = \mathbf{grad}_s \hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{tr} \dot{\hat{\epsilon}}^p(\mathbf{y}, t) = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega, \forall t, \\ \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) \text{ CA}^0 \quad \forall \mathbf{y} \in \delta\Omega_U \end{cases} \quad (\text{II.56})$$

14. Par abus de notation, ces incréments sont également notés  $\dot{\hat{\epsilon}}^p$ .

Par suite, le théorème s'énonce :

**THÉORÈME II.3**

S'il existe un cycle de taux de déformations plastiques,  $\dot{\hat{\epsilon}}^p$ , admissible sur  $[0, T]$  et un trajet de chargements  $\hat{\mathcal{P}} : t \in [0, T] \mapsto \hat{\mathcal{P}}(t) \in \mathcal{D}$  tels que :

$$\int_0^T \left[ \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \cdot \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) dV + \int_{\partial\Omega_F} \mathbf{F}(t) \cdot \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) dS \right] dt > \int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}, t) : \dot{\hat{\epsilon}}^p(\mathbf{y}, t) dV dt,$$

alors la structure ne peut s'adapter pour aucun trajet de chargements inclus dans  $\mathcal{D}$ .

D'après le principe de travaux virtuels, la condition d'inégalité de ce théorème peut également s'exprimer par :

$$\int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{(e)}(\mathbf{y}, t) : \dot{\hat{\epsilon}}^p(\mathbf{y}, t) dV dt > \int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}, t) : \dot{\hat{\epsilon}}^p(\mathbf{y}, t) dV dt \quad (\text{II.57})$$

En introduisant un coefficient de sécurité, tout comme pour le théorème statique, on obtient ensuite la contraposée de ce théorème, qui fournit alors un critère d'adaptation :

**THÉORÈME II.4**

S'il existe  $\gamma > 1$  tel que pour tout cycle de taux de déformations admissible et pour tout chargement  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{D}$ , la relation :

$$\gamma \int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{(e)}(\mathbf{y}, t) : \dot{\hat{\epsilon}}^p(\mathbf{y}, t) dV dt \leq \int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}, t) : \dot{\hat{\epsilon}}^p(\mathbf{y}, t) dV dt$$

soit vérifiée, alors la structure s'adapte pour toute histoire de chargements dans  $\mathcal{D}$ .

D'un point de vue cinématique, il ne peut donc pas y avoir adaptation de la structure s'il existe un champ de déformations plastiques et une histoire de chargements pour lesquels le travail des contraintes purement élastiques soit strictement supérieur au travail dissipé plastiquement par la structure au cours de ce chargement. Afin de faciliter, au chapitre suivant, la transposition du théorème (II.4) en un problème d'optimisation, on en donne ici une forme équivalente mais plus conviviale :

**THÉORÈME II.5**

S'il existe  $\gamma > 1$  tel que pour tout taux de déformations  $\dot{\epsilon}^p$  et pour tout trajet de chargements  $\mathcal{P} : t \in [0, T] \mapsto \mathcal{P}(t) \in \mathcal{D}$  vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \dot{\epsilon}^p(\mathbf{y}, t) dt = \mathbf{grad}_s \mathbf{u}(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega \\ \mathbf{tr} \dot{\epsilon}^p(\mathbf{y}, t) = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega, \forall t \\ \mathbf{u}(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{y} \in \delta\Omega_U \\ \int_0^T \int_{\Omega} \sigma^{(e)}(\mathbf{y}, t) : \dot{\epsilon}^p(\mathbf{y}, t) d\Omega dt = 1 \end{array} \right. \quad (\text{II.58})$$

le travail dissipé plastiquement vérifie :

$$\int_0^T \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{y}, t) : \dot{\epsilon}^p(\mathbf{y}, t) d\Omega dt \geq \gamma \quad (\text{II.59})$$

alors la structure s'adapte pour toute histoire de chargements dans  $\mathcal{D}$ .

Dans ce dernier théorème, le champ de contraintes purement élastiques vérifie toujours les relations (II.36).

## II.5 Bilan du chapitre

L'objectif de ce chapitre était de présenter en détail le phénomène d'adaptation de structures. Pour ce faire, le cadre classique d'application de cette théorie a été défini afin de poser les hypothèses de travail qui seront utilisées dans les chapitre suivants. Pour synthétiser, on considère donc :

- des structures tridimensionnelles composées de matériaux élastoplastiques parfaits,
- des sollicitations de nature quelconque mais variant dans un domaine prédéfini  $\mathcal{D}$ ,
- des transformations infinitésimales, isothermes et quasi-statiques.

On s'est ensuite intéressé, en en présentant l'origine et l'intérêt, aux notions de contraintes résiduelles et de structure élastique de référence, fondamentales en théorie de l'adaptation.

Afin d'appréhender correctement le phénomène d'adaptation, on a ensuite détaillé les différents phénomènes, évoqués au chapitre I, qui sont susceptibles d'apparaître dans une structure soumise à un chargement variable. Ceci nous a amené à classer les types de réponses d'une structure selon deux grandes classes :

- les réponses impliquant la fiabilité de la structure : l'élasticité et l'adaptation,
- les réponses induisant la ruine instantanée ou progressive de la structure : la rupture instantanée par dépassement du chargement limite supportable, le rochet et l'accomodation.

---

La suite du chapitre s'est recentrée sur le phénomène d'adaptation en lui-même, en présentant plusieurs façons de le mettre en évidence :

- expérimentalement, en rapportant une expérience réalisée par KOENIG, n'ayant pas eu la possibilité de réaliser nos propres expériences,
- analytiquement en étudiant le cas d'une poutre en flexion pure permettant d'illustrer la notion de contraintes résiduelles,
- numériquement, en déduisant de l'étude d'une poutre encastree sollicitée en flexion, des critères énergétiques associés aux deux grandes classes précédentes.

Ceci nous a finalement permis de présenter, en fin de chapitre et en termes d'équations, les deux théorèmes classiques de la théorie de l'adaptation, évoqués jusqu'ici uniquement de manière qualitative.





## CHAPITRE III

# Adaptation de matériaux hétérogènes périodiques

---

**T**outes les théories nécessaires à notre étude ayant été présentées, ce chapitre expose désormais le problème particulier auquel nous nous intéressons : l'étude des états limites des matériaux hétérogènes à microstructure périodique. Cette étude mène, en effet, à coupler les théories de l'adaptation, permettant de prendre en compte l'aspect variable et borné des chargements, de l'homogénéisation, permettant de prendre en compte l'aspect hétérogène des matériaux, et enfin, la théorie de l'optimisation, traduisant en termes de programmation mathématique tout problème d'adaptation. Dans cet objectif, on présente en premier lieu quelques éléments bibliographiques concernant le couplage entre l'homogénéisation et les théories aux états limites : l'analyse limite et l'adaptation. On rappelle ensuite brièvement les hypothèses de travail concernant les matériaux, le chargement et les volumes élémentaires représentatifs, en les adaptant à cette notion de couplage. Les deux paragraphes suivants, organisés de manière parallèle, présentent ensuite la particularisation des théorèmes de MELAN et KOITER à l'étude des matériaux hétérogènes périodiques, en précisant, pour chacun, les problèmes d'optimisation associés. Finalement, afin de matérialiser simplement ce couplage, on étudie un exemple autorisant de nombreux développements analytiques : un matériau stratifié.

---

## PLAN DU CHAPITRE III

---

<b>III.1 Quelques éléments bibliographiques . . . . .</b>	<b>84</b>
III.1.1 Couplage entre homogénéisation et analyse limite . . . . .	84
III.1.2 Couplage entre homogénéisation et adaptation . . . . .	85
III.1.3 Conclusions et motivations de notre étude . . . . .	86
<b>III.2 Considérations générales . . . . .</b>	<b>86</b>
III.2.1 Hypothèses matériaux . . . . .	87
III.2.2 Matériaux à microstructure périodique . . . . .	87
III.2.3 Chargements macroscopiques imposés . . . . .	88
III.2.3.a Nature des chargements . . . . .	88
III.2.3.b Variations des chargements . . . . .	89
III.2.4 Deux types de cellules de base . . . . .	90
<b>III.3 Approche statique du couplage entre homogénéisation et adaptation . . . . .</b>	<b>91</b>
III.3.1 Formulation du couplage . . . . .	91
III.3.2 Problèmes cellulaires purement élastiques . . . . .	92
III.3.2.a Milieux à microstructure tridimensionnelle "classique" . . . . .	92
III.3.2.b Structures fines perforées, sollicitées dans leur plan . . . . .	93
III.3.2.c Milieux de types plaques périodiques . . . . .	93
III.3.2.d Conclusions . . . . .	94
III.3.3 Problèmes aux contraintes résiduelles . . . . .	94
III.3.3.a Milieux à microstructure tridimensionnelle "classique" . . . . .	95
III.3.3.b Structures fines perforées, sollicitées dans leur plan . . . . .	95
III.3.3.c Milieux de type plaque périodique . . . . .	95
III.3.3.d Conclusions . . . . .	96
III.3.4 Problèmes de maximisation associés . . . . .	96
III.3.5 Coefficient de sécurité et chargement supportable . . . . .	98
<b>III.4 Approche cinématique du couplage . . . . .</b>	<b>99</b>
III.4.1 Formulation du couplage . . . . .	99
III.4.2 Problème de minimisation associé . . . . .	100
<b>III.5 Exemple illustratif d'un stratifié à déformation imposée . . . . .</b>	<b>102</b>
III.5.1 Position du problème tridimensionnel . . . . .	102
III.5.2 Simplification du problème par exploitation des invariances matérielles . . . . .	103
III.5.2.a Choix de la cellule de base . . . . .	103
III.5.2.b Conséquences sur les contraintes et déformations locales . . . . .	104
III.5.2.c Calcul des contraintes élastiques par couche . . . . .	105
III.5.2.d Propriétés des contraintes résiduelles . . . . .	106
III.5.3 Remarques préliminaires aux calculs analytiques . . . . .	107
III.5.4 Approche statique pour une sollicitation en cisaillement pur . . . . .	108
III.5.4.a Problèmes de maximisation . . . . .	108
III.5.4.b Détermination des coefficients de charge . . . . .	109
III.5.5 Approche cinématique pour une sollicitation en cisaillement pur . . . . .	112
III.5.5.a Formulation du couplage . . . . .	112
III.5.5.b Détermination analytique du coefficient de charge à l'adaptation . . . . .	113
<b>III.6 Exemple illustratif d'un stratifié à contrainte imposée . . . . .</b>	<b>114</b>
III.6.1 Problème 3D, chargement imposé et points de charges . . . . .	114

---

III.6.2	Calcul des contraintes élastiques par couche . . . . .	115
III.6.3	Approche statique pour une sollicitation en cisaillement pur . . . . .	116
III.6.3.a	Problème d'élasticité : détermination de $\alpha^E$ . . . . .	116
III.6.3.b	Problème d'analyse limite : détermination de $\alpha^{AL}$ . . . . .	117
III.6.3.c	Problème d'adaptation : détermination de $\alpha^{AD}$ . . . . .	119
III.6.4	Approche cinématique pour une sollicitation en cisaillement pur . . . . .	120
III.6.4.a	Détermination analytique du coefficient de charge limite . . . . .	120
III.6.4.b	Détermination du coefficient de charge à l'adaptation . . . . .	121
<b>III.7</b>	<b>Bilan du chapitre . . . . .</b>	<b>122</b>

---

— **Avertissement** — *Afin de satisfaire le lecteur qui, ayant déjà des connaissances sur les trois théories présentées aux chapitres I et II, aurait commencé la lecture directement par ce troisième chapitre, on précise que celui-ci a été construit de manière à être un minimum autosuffisant. De ce fait, il présente quelques redites, sous forme résumée, au niveau des équations, dont le détail et/ou l'origine sont exposés aux deux chapitres précédents.*

### III.1 Quelques éléments bibliographiques

Les travaux présentés dans ce paragraphe auraient également leur place, en temps qu'éléments bibliographiques, dans le premier chapitre, mais étant directement liés aux problèmes énoncés dans ce troisième chapitre, il nous a semblé préférable de les inclure ici.

#### III.1.1 Couplage entre homogénéisation et analyse limite

Listons donc d'abord quelques contributions ayant trait au couplage entre l'homogénéisation et l'analyse limite, consistant à déterminer le chargement limite de matériaux hétérogènes. Les tous premiers travaux dont l'objectif était de déterminer le domaine de résistance des matériaux hétérogènes, vis-à-vis de l'analyse limite, concernent des matériaux composites à fibres et datent des recherches de HILL (1950). De nombreux travaux suivirent, tant théoriques qu'expérimentaux, mais furent quasiment tous basés sur des critères phénoménologiques. Ces critères, bien que reflétant assez correctement l'expérience, présentaient cependant deux inconvénients majeurs :

- ils faisaient, de par la nature même des approches phénoménologiques, intervenir un très grand nombre de paramètres nécessaires à la caractérisation du comportement à la rupture (ou comportement limite) des composites étudiés,
- n'étant pas basés sur une véritable approche micromécanique, ils ne prenaient pas rigoureusement en compte les propriétés de résistance des différents constituants des composites étudiés.

Afin de remédier à ces inconvénients inhérents aux méthodes phénoménologiques, d'autres critères ont été proposés, essayant de prendre en compte le comportement mécanique des constituants. Cependant, ces premières améliorations conduisant encore à des critères possédant un trop grand nombre de paramètres, d'autres auteurs tel MC LAUGHLIN en 1972, proposèrent de déterminer le chargement limite de composites en appliquant la théorie de l'analyse limite au volume élémentaire représentatif. La méthode consistait alors à déterminer le domaine de résistance du VER par les théories de l'analyse limite, puis à attribuer ce même domaine de résistance au milieu homogène équivalent entier, sans pour autant utiliser de méthodes d'homogénéisation permettant le passage micro-macro. Cette nouvelle approche permettait donc de remédier au problème du nombre trop important de paramètres, sans cependant donner de relations explicites entre les propriétés de résistance des différents constituants et les propriétés effectives du composite. Il n'y a finalement qu'une vingtaine d'années, SUQUET (1982) et (1983) posa les bases

du couplage entre homogénéisation et analyse limite, en proposant, au travers de relations de moyenne rigoureuses, un critère de plasticité homogénéisé permettant le calcul de charges limites pour des structures fortement hétérogènes. L'approche de SUQUET, dont le domaine de validité a été précisé par TURGEMAN et PASTOR (1987), fut alors à l'origine de nombreux travaux sur les matériaux composites à fibres. On retiendra en particulier les recherches de DE BUHAN et de TALIERCIO. En effet, DE BUHAN (1988) et DE BUHAN et TALIERCIO (1991) proposèrent, en appliquant l'approche statique de l'analyse limite, une formulation théorique d'un critère de résistance pour des matériaux composites renforcés par des fibres longues multidirectionnelles, avec la possibilité de prendre en compte la décohésion entre fibres et matrice. L'avantage principal de leur critère, par rapport aux critères phénoménologiques, est que les paramètres employés sont non seulement peu nombreux, mais également facilement identifiables et possédant une signification physique très précise puisque relative aux propriétés de résistance de chacun des constituants (fibres ou matrice). L'étude cinématique de ces matériaux composites à fibres fut également abordée, d'abord théoriquement puis numériquement par TALIERCIO (1992) et FRANCESCATO et PASTOR (1997). Enfin, toujours sur la base des travaux de SUQUET, d'autres types de matériaux ont été étudiés : DE BUHAN (1983) définit théoriquement les capacités de résistance d'un matériau stratifié, en résolvant le problème à la rupture sur le VER et DÉBORDES *et al.* (1985) et MARIGO *et al.* (1987) appliquèrent, selon la même méthodologie, la théorie de l'homogénéisation périodique au calcul numérique des charges limites, ou de rupture, de plaques périodiquement perforées. Plus récemment, BOURGEOIS *et al.* (1998) et CARVELLI *et al.* (2000) ont également eu recours à l'homogénéisation périodique : BOURGEOIS *et al.* ont étudié au travers de l'approche statique de l'analyse limite, les chargements limites de plaques périodiques, en termes de contraintes généralisées ; CARVELLI *et al.* quant-à-eux ont considéré la résistance des composites à fibres, en utilisant l'approche cinématique de l'analyse limite.

Tous ces travaux réunis constituent un grand pas dans le domaine de l'étude à la rupture, toujours dans le sens de la détermination des chargements limites supportables, de structures présentant des propriétés hétérogènes, que ce soit aux niveaux géométrique et/ou mécanique.

### III.1.2 Couplage entre homogénéisation et adaptation

Cependant, afin de pouvoir considérer les situations pratiquement rencontrées en ingénierie, caractérisées par des chargements variables et pas uniquement des chargements proportionnels comme en analyse limite, ces études couplant l'homogénéisation et l'analyse limite sont, depuis peu, généralisées par de nouvelles études visant à coupler homogénéisation et adaptation. La majorité des auteurs travaillant en ce sens adoptent la même façon de procéder : coupler des méthodes d'homogénéisation, que ce soit la théorie de modules effectifs, la théorie de l'homogénéisation périodique, ou toute autre théorie, avec les approches statique ou cinématique de l'adaptation. Bien que les premières recherches sur ce couplage datent des recherches de TARN *et al.* (1975), l'intérêt scientifique pour ce couplage reste relativement récent. En effet, TARN *et al.* montrèrent dès 1975, en travaillant sur la détermination de domaines de résistance, vis-à-vis de

l'adaptation, de composites unidirectionnels sollicités par des chargements axisymétriques, que la théorie de l'adaptation était à même d'étudier la défaillance de ce type de matériaux. Les autres études sont effectivement plus récentes. PONTER et LECKIE (1998) ont étudié, en utilisant l'approche cinématique de KOITER, la capacité de résistance de composites à matrices métalliques sollicités par un chargement thermique cyclique. Toujours en se reposant sur l'approche cinématique, CARVELLI (1999) et MAIER *et al.* (2000) se sont respectivement intéressés à l'adaptation de plaques périodiquement perforées, suffisamment minces pour que l'hypothèse des contraintes planes soit valide, et à l'adaptation de composites unidirectionnels à matrices métalliques, renforcés par des fibres et sollicités par un état de contraintes uniaxial<sup>1</sup>. Parallèlement, l'approche statique a été étudiée par WEICHERT *et al.* (1999) et SCHWABE (2000), qui s'intéressent l'adaptation de composites à matrices métalliques bidimensionnels. Ces matériaux ont également été étudiés par DVORAK *et al.* (2000). Enfin, l'adaptation d'autres matériaux, les matériaux périodiques multi-couches ou stratifiés soumis à un chargement en déformation, a été étudiée par l'approche statique HACHEMI *et al.* (2001).

### III.1.3 Conclusions et motivations de notre étude

Ces quelques éléments bibliographiques, associés à ceux du premier chapitre, permettent de mettre en lumière trois points essentiels :

- les travaux couplant les théories de l'adaptation et de l'homogénéisation sont peu nombreux et très récents, et ceci est d'autant plus vrai que la théorie de l'homogénéisation concernée est celle de l'homogénéisation périodique,
- parmi les quelques travaux existants, rares sont ceux qui considèrent des structures tridimensionnelles,
- il n'existe, à l'heure actuelle, pas de véritable code contenant une librairie complète d'éléments finis, permettant de traiter de l'adaptation de n'importe quelle structure, qu'elle soit hétérogène ou non.

Ceci nous permet donc de motiver notre étude : on se propose en effet de contribuer à la recherche dans cette branche particulière de la plasticité, en proposant un couplage numérique entre adaptation et homogénéisation périodique afin d'étudier la tenue mécanique, ou résistance, de matériaux élastoplastiques parfaits à microstructure hétérogène, périodique et tridimensionnelle, par une approche directe.

## III.2 Considérations générales

Pour fixer les idées, on résume ici les principales spécificités de notre étude : les propriétés et la microstructure particulière des matériaux étudiés, la nature non classique des chargements

---

1. Selon l'axe des fibres.

qui leur sont imposés, et enfin, les deux sortes de volumes élémentaires représentatifs de ladite microstructure.

### III.2.1 Hypothèses matériaux

On rappelle, avant toute chose, que les matériaux considérés sont supposés obéir à toutes les hypothèses énoncées au paragraphe II.1. On s'attarde ici sur l'une de ces hypothèses, à savoir que les matériaux constitutifs de la cellule de base sont supposés posséder un comportement élastoplastique parfait. Cette cellule exhibe donc, en chacun de ses points, un domaine de plasticité  $F(\mathbf{x})$  à l'intérieur duquel la contrainte microscopique  $\boldsymbol{\sigma}$  est astreinte à rester. Dans notre cas, ce domaine de plasticité local est défini par l'intermédiaire du convexe de plasticité  $\mathcal{F}$  de VON-MISES (voir le paragraphe II.1.2.c) :

$$F(\mathbf{x}) = \left\{ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \mid \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}), \sigma_0(\mathbf{x})) = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^d(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}^d(\mathbf{x})} - \sigma_0(\mathbf{x}) \leq 0 \right\} \quad (\text{III.1})$$

où :

- $\boldsymbol{\sigma}^d(\mathbf{x})$  représente la partie déviatorique de  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  définie par :

$$\boldsymbol{\sigma}^d(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) - \frac{1}{3} (\text{tr } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) \mathbf{I} \quad (\text{III.2})$$

- $\sigma_0(\mathbf{x})$  est la limite d'élasticité du matériau au point  $\mathbf{x}$ .

### III.2.2 Matériaux à microstructure périodique

Les matériaux que nous allons étudier présentent également la particularité de posséder une microstructure de nature périodique. La périodicité est entendue au sens de la définition du paragraphe I.3.4 et est susceptible d'affecter, indépendamment ou de façon couplée, tant les propriétés géométriques que les propriétés matérielles. On complète alors la figure I.11 en la figure III.1, sur laquelle les  $\mathbf{d}^i$  sont les tenseurs d'élasticité des différents constituants du matériau<sup>2</sup>, et les

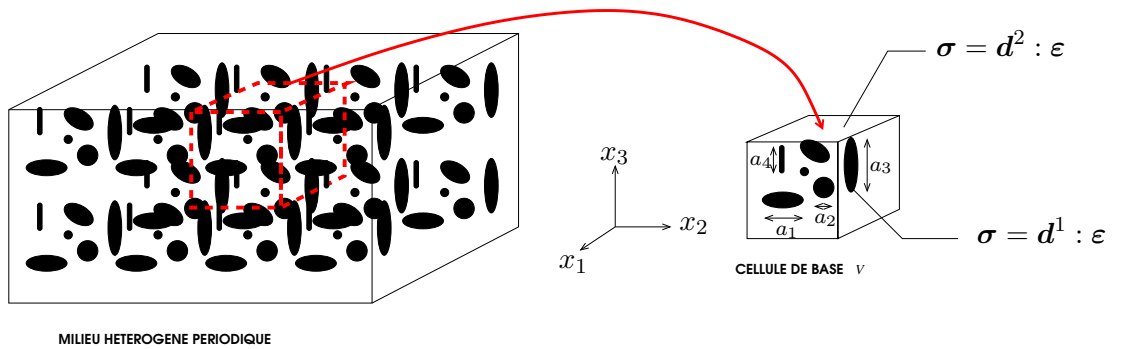


FIGURE III.1 – Propriétés de la cellule de base

2. Par la suite, en particulier au paragraphe III.3, on représentera par  $\mathbf{d}$  n'importe quel des  $\mathbf{d}^i$ , afin de ne pas encombrer l'exposé.



$a_i$  sont, par exemple, différentes tailles possibles des hétérogénéités. Pour chacun des exemples que nous considérerons au chapitre V, le matériau sera donc constitué par la répétition, dans l'une, les deux ou les trois directions de l'espace, d'une cellule de base, aux caractéristiques bien définies. Pratiquement, les  $a_i$  représenteront successivement :

- l'épaisseur des différentes couches d'un matériau stratifié,
- le diamètre des cavités perforant périodiquement une structure fine,
- les dimensions des renforts d'une plaque mince, perpendiculaires à son plan moyen,
- ou encore le diamètre de sphères élastiques renforçant une matrice élastoplastique.

### III.2.3 Chargements macroscopiques imposés

La cellule de base étant définie, intéressons nous désormais aux différentes sollicitations qui vont lui être imposées afin de déterminer les domaines de résistances macroscopiques vis-à-vis de l'élasticité, de l'analyse limite et de l'adaptation.

#### III.2.3.a Nature des chargements

Dans un problème classique de calcul de structures, tels les problèmes présentés au chapitre précédent, les sollicitations sont généralement imposées sous la forme de forces volumiques  $\mathbf{f}$ , de forces surfaciques  $\mathbf{F}$  ou encore de déplacements  $\mathbf{U}$ . Cela ne peut cependant plus être le cas dès lors que le problème concerne une structure hétérogène et que la notion d'échelle apparaît. En effet, si la structure hétérogène est effectivement soumise à des sollicitations classiques, il n'en va pas de même pour la cellule de base. Comme exposé au paragraphe I.3, le principe de base de l'homogénéisation est de substituer, à un matériau réel hétérogène, un matériau fictif homogène, mais au comportement équivalent, sur lequel il est plus simple de mener des calculs. Ainsi, selon les définitions (I.27), le matériau réel et le matériaux fictif homogène, soumis aux mêmes sollicitations  $(\mathbf{f}, \mathbf{F}, \mathbf{U})$ , sont censés répondre de façons identiques. Quant à la cellule de base, représentant un zoom du point macroscopique  $\mathbf{X}$ , elle est soumise aux champs  $\Sigma$  et/ou  $\mathbf{E}$ , champs de contraintes et déformations qui prennent naissance au point  $\mathbf{X}$  du matériau homogène équivalent du fait des sollicitations macroscopiques  $(\mathbf{f}, \mathbf{F}, \mathbf{U})$ . Les chargements sur la cellule de base sont donc considérés comme homogènes, c'est-à-dire qu'ils dépendent uniquement du point macroscopique  $\mathbf{X}$ . On résume ceci sur la figure III.2, où les relations entre les variables

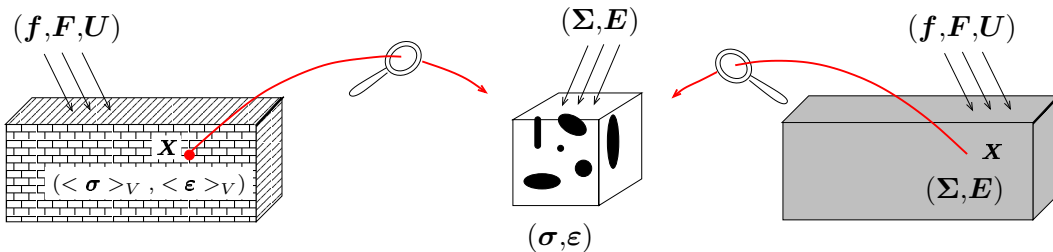


FIGURE III.2 – Sollicitations réelles et chargements macroscopiques

microscopiques et leurs homologues macroscopiques sont données par I.27<sup>3</sup> dans le cas d'une cellule de base sans trou ni fissure :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\sigma} \, d\mathbf{x} \triangleq \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V \\ \mathbf{E} = \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\varepsilon} \, d\mathbf{x} \triangleq \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V \end{array} \right. \quad (\text{III.3})$$

Les chargements  $\mathcal{P}$  du chapitre II sont donc, pour notre étude, toutes les combinaisons admissibles des contraintes et déformations macroscopiques agissant sur la cellule de base :

$$\mathcal{P} = (\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{E}) \quad (\text{III.4})$$

Précisons ce que l'on entend par *combinaisons admissibles*. Les tenseurs de contraintes et déformations considérés étant symétriques, on les représente par leurs six composantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\Sigma} = ( \Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{33}, \Sigma_{12}, \Sigma_{23}, \Sigma_{13} ) \\ \mathbf{E} = ( E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2E_{12}, 2E_{23}, 2E_{13} ) \end{array} \right. \quad (\text{III.5})$$

Une combinaison admissible de contraintes et déformations macroscopiques est alors une combinaison faisant intervenir six composantes distinctes de  $\boldsymbol{\Sigma}$  et de  $\mathbf{E}$ .

#### EXEMPLE III.1

Par exemple, le chargement  $\mathcal{P}^1$ , défini par la combinaison (III.6) :

$$\mathcal{P}^1 = ( \Sigma_{11} \neq 0, E_{22} \neq 0, \Sigma_{33} = 0, \Sigma_{12} = 0, \Sigma_{23} = 0, \Sigma_{13} = 0 ) \quad (\text{III.6})$$

est admissible, alors que le chargement  $\mathcal{P}^2$ , défini par la combinaison (III.7) ne l'est pas.

$$\mathcal{P}^2 = ( \Sigma_{11} \neq 0, E_{11} \neq 0, \Sigma_{33} = 0, \Sigma_{12} = 0, \Sigma_{23} = 0, \Sigma_{13} = 0 ) \quad (\text{III.7})$$

✗

#### III.2.3.b Variations des chargements

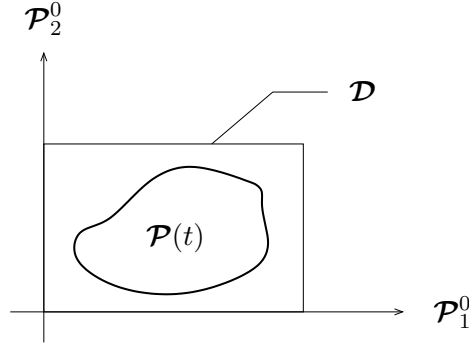
Revenons désormais sur la notion de domaine de chargements. Comme précisé aux chapitres I et II, il nous est inutile de connaître pas à pas l'histoire du chargement  $\mathcal{P}$ . Il suffit, pour pouvoir mener notre étude des états limites, de savoir borner ce chargement. On suppose donc que les sollicitations imposées à la cellule de base, combinaisons admissibles de  $n$  chargements indépendants, sont incluses dans le polyèdre convexe  $\mathcal{D}$ , défini par (III.8) et représenté figure III.3 dans le cas où  $n = 2$ .

$$\mathcal{D} = \left\{ \mathcal{P}(t) \mid \mathcal{P}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(t) \mathcal{P}_i^0, \quad \mu_i \in [\mu_i^-, \mu_i^+] \right\} \quad (\text{III.8})$$

Dans cette définition, les quantités  $\mathcal{P}_i^0$  sont des chargements initiaux exprimés en termes de contraintes ou déformations macroscopiques.

---

3. Que l'on redonne ici afin de clarifier l'exposé.

FIGURE III.3 – *Choix du domaine initial de chargements***REMARQUE III.1**

Le polyèdre est choisi tel que l'un de ses sommets soit confondu avec l'origine. Ce choix est arbitraire mais revêt une importance capitale, que nous exposerons en détail au chapitre V lors de l'explication de la lecture des domaines de résistance obtenus (paragraphe (V.1.3.c)).

□

**EXEMPLE III.2**

A titre d'exemple, si l'on se place dans un espace de dimension deux ( $n = 2$ ), l'une des bases de chargements possible est la suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1^0 = ( \Sigma_{11} \neq 0, \Sigma_{22} = 0, \Sigma_{33} = 0, \Sigma_{12} = 0, \Sigma_{23} = 0, \Sigma_{13} = 0 ) \\ \mathcal{P}_2^0 = ( \Sigma_{11} = 0, \Sigma_{22} \neq 0, \Sigma_{33} = 0, \Sigma_{12} = 0, \Sigma_{23} = 0, \Sigma_{13} = 0 ) \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

Dans ce cas, tout chargement imposé sera combinaison linéaire des vecteurs de base  $(\mathcal{P}_1^0, \mathcal{P}_2^0)$ <sup>4</sup>.

✕

**III.2.4 Deux types de cellules de base**

Finalement, les chargements étant imposés à la cellule de base, celle-ci est considérée comme une microstructure, sur laquelle il est alors possible de poser tout problème de tenue mécanique, que ce soit du point de vue de l'élasticité, de l'adaptation ou de l'analyse limite. Poser ce type de problème sur la cellule de base, tout comme nous l'avons posé sur un milieu tridimensionnel quelconque<sup>5</sup> au chapitre précédent, implique alors de considérer une deuxième cellule de base, dite de référence, tout comme il a été considéré un milieu 3D de référence (figure II.2). Cette nouvelle cellule est définie de la façon suivante : elle possède les mêmes caractéristiques géométriques que la cellule réelle, mais, une fois soumise aux mêmes chargements, répond de façon purement élastique. Par analogie avec le chapitre précédent, on représente figure III.4 la cellule de base réelle élastoplastique parfaite, notée VER, et la cellule de base de référence purement élastique, notée VER<sup>(e)</sup>.

4. Pour plus de détails, se reporter au chapitre V.

5. C'est-à-dire sans notion d'échelle.

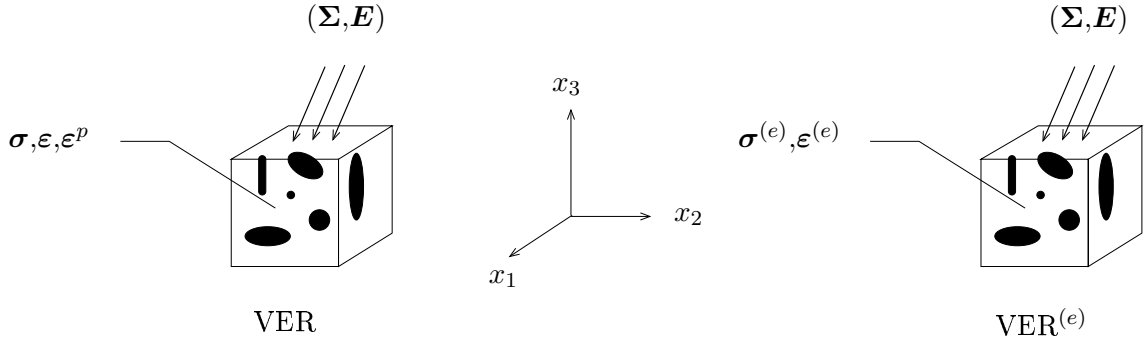


FIGURE III.4 – Cellules de base réelle et de référence

### III.3 Approche statique du couplage entre homogénéisation et adaptation

Afin de traiter de l'adaptation de matériaux hétérogènes à microstructure périodique, on présente dans un premier temps, le couplage, inspiré des travaux de SCHWABE (2000), entre le théorème statique de MELAN et la théorie de l'homogénéisation périodique. La méthodologie est similaire à celle employée par SUQUET (1982) pour coupler l'approche statique de l'analyse limite et l'homogénéisation périodique. On se base donc sur le théorème II.1, puis l'on montre que cela revient à résoudre un problème de maximisation non linéaire sous contraintes, et enfin on réintroduit la notion de coefficient de sécurité, afin de donner le domaine de validité du résultat final.

#### III.3.1 Formulation du couplage

L'énoncé du théorème couplé ne diffère de l'énoncé du théorème (II.1) que par le fait que les contraintes sont, cette fois-ci, exprimées sur la cellule de base : elles dépendent donc toujours du temps, à l'exception des contraintes résiduelles, mais également de la variable d'espace microscopique  $\mathbf{x}$ , décrivant la cellule de base.

##### THÉORÈME III.1

S'il existe un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps  $\bar{\rho} : \mathbf{x} \in V \mapsto \bar{\rho}(\mathbf{x})$ , tel que :

$$\mathcal{F} \left( \sigma^{(e)}(\mathbf{x}, t) + \bar{\rho}(\mathbf{x}) \right) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \text{ et } \forall \mathcal{P}(t) \in \mathcal{D}, \forall t$$

alors le matériau hétérogène s'adapte pour tous les trajets de chargements  $\mathcal{P} : t \in [0, +\infty] \mapsto \mathcal{P}(t) \in \mathcal{D}$ . Dans ce cas, on dira qu'il y a adaptation pour le domaine  $\mathcal{D}$ .

On précise que  $\sigma^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ , encore noté  $\sigma^{(e)}$ , est l'état de contraintes purement élastiques engendré par le chargement  $\mathcal{P}(t)$  :

$$\sigma^{(e)}(\mathbf{x}, t) \equiv \sigma^{(e)}(\mathbf{x}, \mathcal{P}(t)) \quad (\text{III.10})$$

Il y a donc adaptation de la cellule de base si le champ résultant de la somme des contraintes purement élastiques et des contraintes résiduelles constitue un état de contraintes de sécurité, quels que soit le point de la cellule de base et le trajet de chargements considérés, c'est-à-dire que :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}^{(e)}(\mathbf{x}, t) + \bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x}) \in \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \text{ et } \forall \mathcal{P}(t) \in \mathcal{D}, \forall t \quad (\text{III.11})$$

### III.3.2 Problèmes cellulaires purement élastiques

Le champ de contraintes microscopiques purement élastiques  $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$  est alors solution d'un problème d'élasticité posé sur la cellule de base. Ce problème cellulaire est calqué sur les problèmes de localisation présentés, selon le type de cellule de base, aux paragraphes I.3.4, I.3.5 et I.3.6.

#### III.3.2.a Milieux à microstructure tridimensionnelle "classique"

Dans le cas d'une cellule de base tridimensionnelle ne présentant ni trou ni fissure, ces problèmes sont classiques vis-à-vis des équations d'équilibre et de compatibilité, mais mettent en lumière le couplage entre les deux théories au niveau des points suivants :

- de par leur cinématique faisant intervenir un déplacement périodique. On rappelle en effet qu'en théorie de l'homogénéisation périodique, le déplacement est scindé en deux parties (voir paragraphe I.3.4.b, équation (I.40)) :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{E}.\mathbf{x} + \mathbf{u}^{pér} && \text{à déformation imposée} \\ \mathbf{u} &= \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V . \mathbf{x} + \mathbf{u}^{pér} && \text{à contrainte imposée} \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

- de par leurs conditions aux limites, découlant de cette cinématique (voir équations (I.35) et (I.39), paragraphes I.3.3.b et I.3.3.c) :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{pér} \text{ périodique sur } \partial V \\ \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial V \end{cases} \quad \text{à déformation imposée} \quad (\text{III.13})$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{pér} \text{ périodique sur } \partial V \\ \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial V \end{cases} \quad \text{à contrainte imposée}$$

- de par la nature globale du chargement. En effet, comme présenté au paragraphe III.2.3.a, le chargement est imposée en moyenne :

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V = \mathbf{E} & \text{à déformation imposée} \\ \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_V = \boldsymbol{\Sigma} & \text{à contrainte imposée} \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

On a alors à résoudre :

Approche déformation : $P_{\text{def}}^{(e),cl}$	Approche contrainte : $P_{\text{cont}}^{(e),cl}$
$\mathbf{E}$ donnée Trouver $\mathbf{u}^{pér,(e)}$ , et $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$ t.q. : $\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{0} \text{ dans } V \\ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{d} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} (\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \rangle_V \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^{pér,(e)}) \\ \mathbf{u}^{pér,(e)} \text{ périodique sur } \partial V \\ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial V \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \rangle_V = \mathbf{E} \end{cases}$	$\boldsymbol{\Sigma}$ donnée Trouver $\mathbf{u}^{pér,(e)}$ , et $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$ t.q. : $\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{0} \text{ dans } V \\ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{d} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} (\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \rangle_V \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^{pér,(e)}) \\ \mathbf{u}^{pér,(e)} \text{ périodique sur } \partial V \\ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial V \\ \langle \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \rangle_V = \boldsymbol{\Sigma} \end{cases}$

### III.3.2.b Structures fines perforées, sollicitées dans leur plan

Si l'on considère une cellule de base représentative d'une structure fine à cavités sollicitée dans son plan, la cinématique (III.12) reste valable, moyennant la restriction (I.44), mais les conditions limites évoluent quelque peu. Les problèmes de localisation précédents se particularisent donc en (voir le paragraphe I.3.5 pour plus de détails sur les définitions de la cellule de base et de l'opérateur moyenne sur cette cellule) :

Approche déformation : $P_{\text{def}}^{(e),cav}$	Approche contrainte : $P_{\text{cont}}^{(e),cav}$
$\tilde{\mathbf{E}}$ donnée Trouver $\mathbf{u}^{pér,(e)}$ , et $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$ t.q. : $\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{0} \text{ dans } V^* \\ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{d} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} (\langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)} \rangle_V \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^{pér,(e)}) \\ \mathbf{u}^{pér,(e)} \text{ périodique sur } \partial V_{\text{lat}} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial V_{\text{lat}} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial H \cup \partial V_{\text{sup}} \cup \partial V_{\text{inf}} \\ \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)} \rangle_V = \tilde{\mathbf{E}} \text{ au sens de (I.45)} \end{cases}$	$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ donnée Trouver $\mathbf{u}^{pér,(e)}$ , et $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$ t.q. : $\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{0} \text{ dans } V^* \\ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{d} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} (\langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)} \rangle_V \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^{pér,(e)}) \\ \mathbf{u}^{pér,(e)} \text{ périodique sur } \partial V_{\text{lat}} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial V_{\text{lat}} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial H \cup \partial V_{\text{sup}} \cup \partial V_{\text{inf}} \\ \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(e)} \rangle_V = \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \text{ au sens de (I.46)} \end{cases}$

### III.3.2.c Milieux de types plaques périodiques

Enfin, le dernier type de problèmes cellulaires purement élastiques concerne les problèmes exprimés en termes de déformations ou contraintes généralisées. La méthodologie reste la même, mais deux points essentiels diffèrent du cadre général défini par (III.12) et (III.13) (voir paragraphe I.3.6.b) :

- les chargements imposés à la cellule de base sont des chargements généralisés, c'est-à-dire des déformations de membrane et de flexion  $(\mathbf{E}, \mathbf{K})$  et des contraintes de membrane et de flexion  $(\mathbf{N}, \mathbf{M})$ ,
- la cinématique devient donc une cinématique de plaque, définie par (III.15) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{E} - x_3 \mathbf{K} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{pér}) \quad (\text{III.15})$$

Le champ  $\sigma^{(e)}$  est donc solution de l'un des problèmes cellulaires suivants :

Approche déformation : $P_{déf}^{(e),plq}$	Approche contrainte : $P_{cont}^{(e),plq}$
$(\mathbf{E}, \mathbf{K})$ données Trouver $\mathbf{u}^{pér,(e)}$ , et $\sigma^{(e)}$ t.q. :	$(\mathbf{N}, \mathbf{M})$ données Trouver $\mathbf{u}^{pér,(e)}$ , et $\sigma^{(e)}$ t.q. :
$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div} \sigma^{(e)} = \mathbf{0} \text{ dans } V \\ \sigma^{(e)} = \mathbf{d} : (\mathbf{E} - x_3 \mathbf{K} + \varepsilon(\mathbf{u}^{pér,(e)})) \\ \mathbf{u}^{pér,(e)} \text{ périodique sur } \partial V_{lat} \\ \sigma^{(e)} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial V_{lat} \\ \sigma^{(e)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial V_{inf} \text{ et } \partial V_{sup} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div} \sigma^{(e)} = \mathbf{0} \text{ dans } V \\ \sigma^{(e)} = \mathbf{d} : (\mathbf{E} - x_3 \mathbf{K} + \varepsilon(\mathbf{u}^{pér,(e)})) \\ \mathbf{u}^{pér,(e)} \text{ périodique sur } \partial V_{lat} \\ \sigma^{(e)} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial V_{lat} \\ \sigma^{(e)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial V_{inf} \text{ et } \partial V_{sup} \\ \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle_{\bar{V}} = N_{\alpha\beta} \\ \langle -x_3 \sigma_{\alpha\beta} \rangle_{\bar{V}} = M_{\alpha\beta} \end{array} \right.$

sachant que les relations (I.55) sont toujours valables.

### III.3.2.d Conclusions

Pour résumer, nous serons donc amenés à traiter six types de problèmes cellulaires élastiques, différents les uns des autres, soit par les conditions limites, soit par le chargement et la cinématique imposés. Cependant, quel que soit le type de cellule de base (III.3.2.a, III.3.2.b ou III.3.2.c), l'objectif reste toujours le même : calculer les contraintes purement élastiques engendrées par les chargements macroscopiques en déformation ou en contrainte. Par la suite, on adopte donc la convention suivante :

- le terme générique  $P_{déf}^{(e)}$  désignera selon le cas  $P_{déf}^{(e),cl}$ ,  $P_{déf}^{(e),cav}$  ou  $P_{déf}^{(e),plq}$ ,
- le terme générique  $P_{cont}^{(e)}$  désignera selon le cas  $P_{cont}^{(e),cl}$ ,  $P_{cont}^{(e),cav}$  ou  $P_{cont}^{(e),plq}$ .

Précisons que des composantes mixtes de la déformation et de la contrainte peuvent être imposées, comme indiqué par l'exemple (III.1). Cependant, traitant séparément, au chapitre V, les cas en déformation et en contrainte, on ne présente pas dans la suite les problèmes associés à ces chargements mixtes.

### III.3.3 Problèmes aux contraintes résiduelles

Il en va de même pour les contraintes résiduelles  $\bar{\rho}$  qui sont, quant-à-elles,  $V$ -périodiques et auto-équilibrées. Elles vérifient donc le problème (II.37), posé sur la cellule de base et modifié par :

- les conditions de périodicité : anti-périodicité de  $\bar{\rho} \cdot \mathbf{n}$  sur tout ou partie de  $\partial V$  en fonction du type de problème traité. Ces conditions assurent alors l'équilibre de chaque cellule avec ses voisines,
- les conditions de moyenne :  $\langle \bar{\rho} \rangle_V = \mathbf{0}$  (où l'opérateur  $\langle \dots \rangle_V$  est défini en fonction du type de problème traité), assurant, lorsque l'on travaille à contrainte imposée, que la totalité du chargement macroscopique est récupéré par les contraintes purement élastiques.

## III.3.3.a Milieux à microstructure tridimensionnelle "classique"

Suivant que l'on travaille à déformation ou à contrainte imposée, le champ  $\bar{\rho}$  est donc respectivement solution de  $P_{déf}^{(r),cl}$  et  $P_{cont}^{(r),cl}$  :

Approche déformation : $P_{déf}^{(r),cl}$	Approche contrainte : $P_{cont}^{(r),cl}$
$\mathbf{E}$ donnée	$\Sigma$ donnée
Trouver $\bar{\rho}$ t.q. :	Trouver $\bar{\rho}$ t.q. :
$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{\rho} = \mathbf{0} & \text{dans } V \\ \bar{\rho} \cdot \mathbf{n} & \text{anti-périodique sur } \partial V \end{cases}$	$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{\rho} = \mathbf{0} & \text{dans } V \\ \bar{\rho} \cdot \mathbf{n} & \text{anti-périodique sur } \partial V \\ \langle \bar{\rho} \rangle_V = \mathbf{0} \end{cases}$

On précise que la dépendance en temps de  $\bar{\rho}$  est implicitement vérifiée, ce qui explique la disparition de l'équation " $\dot{\bar{\rho}} = \mathbf{0} \quad \forall t \geq 0$ " dans les problèmes  $P_{déf}^{(r),cl}$  et  $P_{cont}^{(r),cl}$ .

## III.3.3.b Structures fines perforées, sollicitées dans leur plan

Dans le cas de structures fines à cavités, on retrouve les mêmes modifications des conditions limites que pour le problème purement élastique.

Approche déformation : $P_{déf}^{(r),cav}$	Approche contrainte : $P_{cont}^{(r),cav}$
$\tilde{\mathbf{E}}$ donnée	$\tilde{\Sigma}$ donnée
Trouver $\bar{\rho}$ t.q. :	Trouver $\bar{\rho}$ t.q. :
$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{\rho} = \mathbf{0} & \text{dans } V \\ \bar{\rho} \cdot \mathbf{n} & \text{anti-périodique sur } \partial V_{lat} \\ \bar{\rho} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial H \cup \partial V_{sup} \cup \partial V_{inf} \end{cases}$	$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{\rho} = \mathbf{0} & \text{dans } V \\ \bar{\rho} \cdot \mathbf{n} & \text{anti-périodique sur } \partial V_{lat} \\ \bar{\rho} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial H \cup \partial V_{sup} \cup \partial V_{inf} \\ \langle \tilde{\rho} \rangle_V = \mathbf{0} & \text{au sens de (I.46)} \end{cases}$

## III.3.3.c Milieux de type plaque périodique

Enfin, pour des milieux de type plaque périodique, on a :

Approche déformation : $P_{déf}^{(r),plq}$	Approche contrainte : $P_{cont}^{(r),plq}$
$(\mathbf{E}, \mathbf{K})$ données	$(\mathbf{N}, \mathbf{M})$ données
Trouver $\bar{\rho}$ t.q. :	Trouver $\bar{\rho}$ t.q. :
$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{\rho} = \mathbf{0} & \text{dans } V \\ \bar{\rho} \cdot \mathbf{n} & \text{anti-périodique sur } \partial V_{lat} \\ \bar{\rho} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial V_{inf} \text{ et } \partial V_{sup} \end{cases}$	$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{\rho} = \mathbf{0} & \text{dans } V \\ \bar{\rho} \cdot \mathbf{n} & \text{anti-périodique sur } \partial V_{lat} \\ \bar{\rho} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial V_{inf} \text{ et } \partial V_{sup} \\ \langle \bar{\rho}_{\alpha\beta} \rangle_V = 0 \\ \langle -x_3 \bar{\rho}_{\alpha\beta} \rangle_V = 0 \end{cases}$



### III.3.3.d Conclusions

Il existe donc également six types de problèmes aux contraintes résiduelles, correspondant respectivement aux six types de problèmes purement élastiques, que l'on synthétise comme suit :

- le terme générique  $P_{\text{déf}}^{(r)}$  désignera selon le cas  $P_{\text{déf}}^{(r),cl}$ ,  $P_{\text{déf}}^{(r),cav}$  ou  $P_{\text{déf}}^{(r),plq}$ ,
- le terme générique  $P_{\text{cont}}^{(r)}$  désignera selon le cas  $P_{\text{cont}}^{(r),cl}$ ,  $P_{\text{cont}}^{(r),cav}$  ou  $P_{\text{cont}}^{(r),plq}$ .

### III.3.4 Problèmes de maximisation associés

Les trois paragraphes précédents conduisent donc à considérer deux grandes classes de problèmes couplés. En effet, selon le type de problèmes et selon que l'on travaille à déformation ou à contrainte imposée, l'on est respectivement en présence :

- des problèmes couplés "théorème III.1 +  $P_{\text{déf}}^{(e)} + P_{\text{déf}}^{(r)}$ ", que l'on note  $P_{\text{déf}}^{\text{stat}}$ ,
- des problèmes couplés "théorème III.1 +  $P_{\text{cont}}^{(e)} + P_{\text{cont}}^{(r)}$ " que l'on note  $P_{\text{cont}}^{\text{stat}}$ ,

l'indice "stat" faisant référence à l'approche *statique* du théorème de MELAN. On résume sur le schéma III.5 ces différents types de problèmes. Sans rentrer dans le détail des 12 problèmes, il

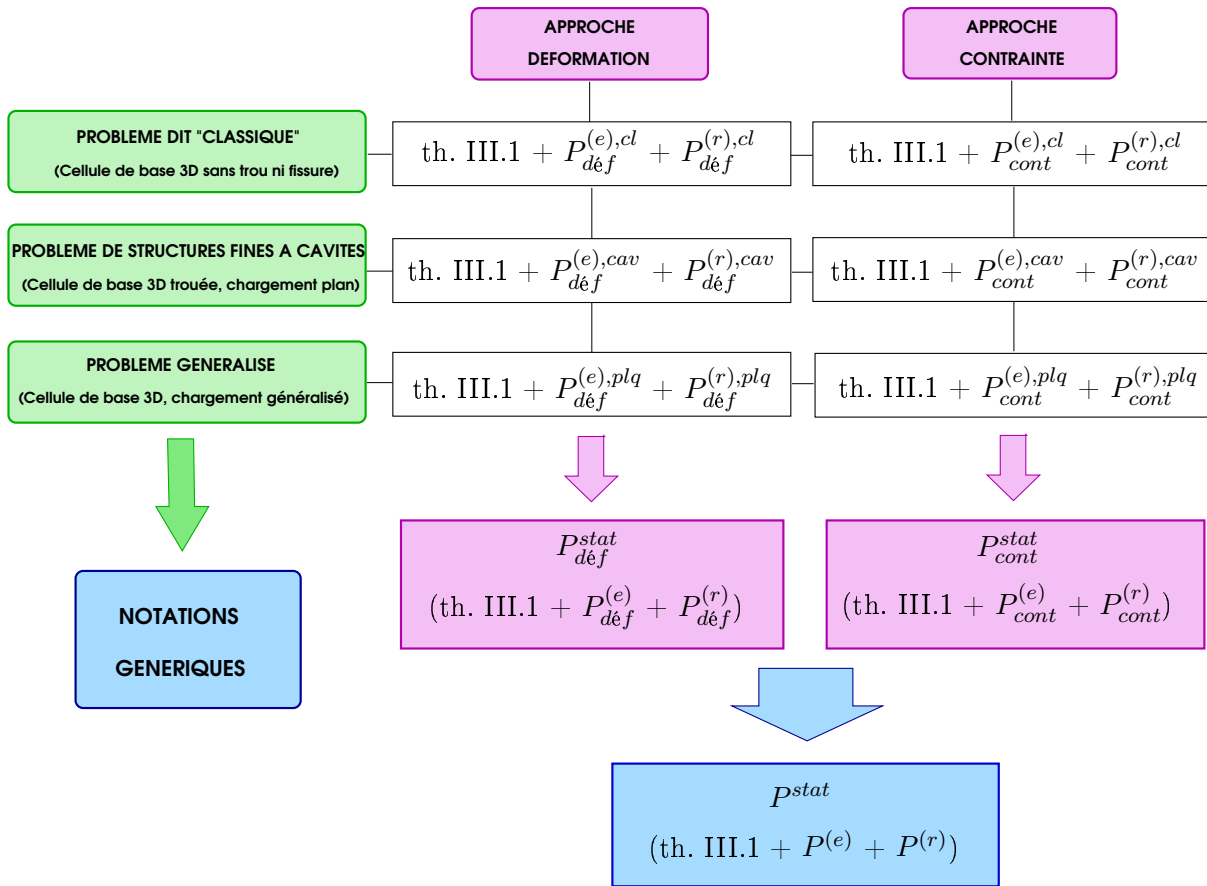


FIGURE III.5 – Schéma de synthèse des différents problèmes traités pour l'approche statique du couplage homogénéisation/adaptation

est important de retenir que les contraintes purement élastiques et les contraintes résiduelles<sup>6</sup> apparaissant dans le théorème (III.1), satisfont respectivement un problème cellulaire élastique et un problème cellulaire auto-équilibré, prenant en compte les relations de moyenne et de périodicité sur la cellule de base.

On présente, dans ce qui suit, le principe d'un calcul aux états limites sur la base d'un calcul à l'adaptation, tout en ayant à l'esprit que la méthodologie reste la même pour un calcul d'élasticité ou d'analyse limite. Les ingrédients de base d'un tel calcul sont les suivants :

- une cellule de base  $V$ , définie par sa géométrie et ses caractéristiques mécaniques. Concrètement les caractéristiques géométriques correspondent aux dimensions des différents constituants de la cellule et les caractéristiques mécaniques aux modules de YOUNG, coefficients de POISSON et contraintes seuil d'élasticité de ces mêmes constituants supposés isotropes<sup>7</sup>.
- un domaine initial de chargements  $\mathcal{D}$ , fixé arbitrairement du type du domaine de la figure III.3.

La méthode consiste ensuite à rechercher dans quelles limites il est possible d'amplifier ou de réduire ce domaine de façon à ce que la cellule de base s'adapte. Cette recherche est matérialisée par l'introduction d'un coefficient multiplicateur  $\alpha^{AD}$  strictement positif, appelé *coefficient de charge à l'adaptation*, qui, une fois appliqué au domaine initial de chargements, fournit un domaine final homothétique du premier et à l'intérieur duquel on est sûr qu'il y a adaptation de la cellule de base. Cette notion d'homothétie conduit alors naturellement à considérer les problèmes couplés  $P_{\text{déf}}^{\text{stat}}$  et  $P_{\text{cont}}^{\text{stat}}$  comme des problèmes d'optimisation. Une fois donné un trajet de chargements  $\mathcal{P} : t \in [0; +\infty] \mapsto \mathcal{P}(t)$  inclus dans  $\mathcal{D}$ , le problème d'optimisation s'exprime comme suit :

$P^{\text{max}}$  : Trouver  $\alpha^{AD}$  tel que :  $\alpha^{AD} = \max_{\bar{\rho}, \alpha}(\alpha)$  où  $\bar{\rho}$  satisfait :

$$\mathcal{F}\left(\alpha \sigma^{(e)}(x, \mathcal{P}(t)) + \bar{\rho}(x), \sigma_0(x)\right) \leq 0 \quad \forall x \in V, \text{ et } \forall t \quad (\text{III.16a})$$

$$P^{(r)} \quad (\text{III.16b})$$

où  $\sigma^{(e)}$  est solution de  $P^{(e)}$  et où  $P^{(r)}$  représente soit  $P_{\text{déf}}^{(r)}$ , soit  $P_{\text{cont}}^{(r)}$ . On est donc en présence d'un problème de **maximisation non linéaire sous contraintes** :

- la fonction objectif du problème  $P^{\text{max}}$  est le coefficient de charge  $\alpha$ ,
- les contraintes d'inégalités (III.16a) sont constituées par les critères de VON-MISES, exprimés pour chaque instant de chargement et pour chaque point de la cellule de base. De par la nature même du critère, ces contraintes sont non linéaires en  $\bar{\rho}$ ,

---

6. L'indépendance en temps de ces contraintes étant implicitement admise, ce champ sera simplement noté  $\rho$  au chapitre suivant.

7. Le critère de plasticité choisi pour les matériaux étant le critère de VON-MISES, aucune autre caractéristique mécanique n'est nécessaire.

- les contraintes d'égalités (III.16b) représentent toutes les conditions devant être vérifiées par les seules contraintes résiduelles. Provenant des systèmes d'équations linéaires  $P_{def}^{(r)}$  ou  $P_{cont}^{(r)}$ , ces conditions sont linéaires.

Après maximisation, on est donc à même de fournir un domaine de chargements  $\mathcal{D}^{AD}$  (voir figure III.6), défini dans l'espace  $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ , à l'intérieur duquel on est sûr qu'il y a adaptation de la cellule de base. Tous les chargements de  $\mathcal{D}^{AD}$  de la forme :

$$\alpha^{AD} \mathcal{P}(t) \quad \text{où} \quad \mathcal{P}(t) \in \mathcal{D} \quad (\text{III.17})$$

sont donc des chargements fiables, c'est à dire qu'une fois soumise à ces chargements, la cellule de base retrouvera finalement un comportement purement élastique. Ce problème de maximisation, basé sur le théorème (II.1), consiste donc en une approche par l'intérieur des domaines d'adaptation.

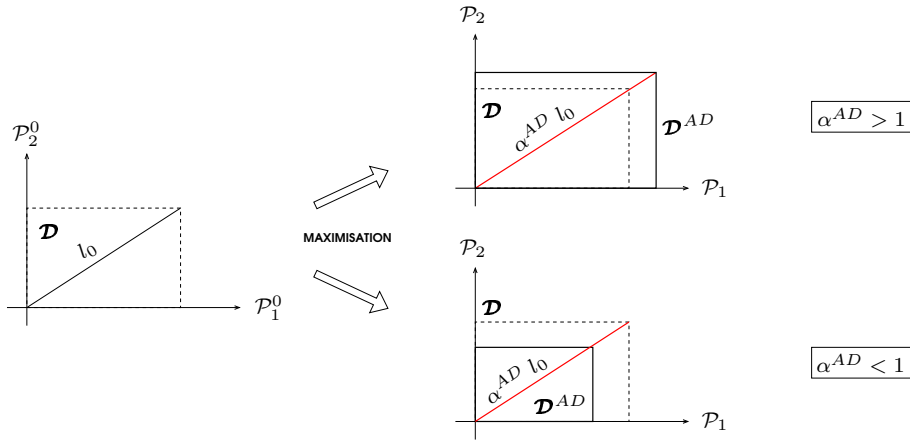


FIGURE III.6 – Approche statique : principe de la maximisation

On a occulté, dans ce qui vient d'être énoncé, la notion de coefficient de sécurité. On rétablit ceci ci-après, en précisant la notion, pour l'instant vague, d'intérieur du domaine  $\mathcal{D}^{AD}$ .

### III.3.5 Coefficient de sécurité et chargement supportable

L'étape d'optimisation permet donc de déterminer l'ensemble des chargements fiables, relativement à un type de domaine initial donné. Afin de conclure définitivement à la fiabilité de la cellule de base, reste désormais à réintroduire la notion de coefficient de sécurité, permettant de préciser la phrase à propos de  $\mathcal{D}^{AD}$  : "[...] à l'intérieur duquel on est sûr qu'il y a adaptation de la cellule de base [...]". En effet, en raisonnant sur les résultats de l'optimisation, on montre<sup>8</sup> l'affirmation suivante :

8. La preuve est donnée en annexe C.

Etant donné le couple  $(\alpha^{AD}, \mathcal{P}(t))$  solution du problème d'optimisation  $P^{max}$ , il existe deux coefficients  $\mu < \alpha^{AD}$ ,  $\beta = \frac{\alpha^{AD}}{\mu} > 1$  et un champ de contraintes résiduelles  $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{1}{\beta} \bar{\boldsymbol{\rho}}$  tels que :

$$\mathcal{F} \left( \beta \left( \mu \boldsymbol{\sigma}^{(e)}(\mathbf{x}, \mathcal{P}(t)) + \hat{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x}) \right) \right) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \text{ et } \forall \mathcal{P}(t) \in \mathcal{D} \quad (\text{III.18})$$

Ceci signifie donc qu'il y a adaptation au sens du théorème (II.2), qui se trouve être le sens de la sécurité, pour tout chargement de type :

$$\mu \mathcal{P}(t) \quad \text{avec } \mu < \alpha^{AD} \quad (\text{III.19})$$

En d'autres termes, il est impossible d'assurer qu'il y a adaptation sur la frontière du domaine  $\mathcal{D}^{AD}$  (ce cas correspondrait à l'égalité  $\mu = \alpha^{AD}$ ), par contre tout chargement inclus dans l'intérieur strict de  $\mathcal{D}^{AD}$  conduit forcément à l'adaptation.

### III.4 Approche cinématique du couplage

Les mêmes méthodes s'appliquent pour étudier l'approche cinématique du couplage entre homogénéisation et adaptation, à ceci près que le théorème d'adaptation utilisé devient le théorème de KOITER.

#### III.4.1 Formulation du couplage

Comme pour l'approche statique, on se base sur l'énoncé général du théorème cinématique (II.5) afin de le particulariser au cas de matériaux hétérogènes. On obtient alors l'énoncé (III.2) en introduisant cette fois-ci directement le coefficient de sécurité<sup>9</sup> :

##### THÉORÈME III.2

S'il existe  $\gamma > 1$  tel que pour tout taux de déformations  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  et pour tout trajet de chargements  $\mathcal{P} : t \in [0, T] \mapsto \mathcal{P}(t) \in \mathcal{D}$  vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x}, t) dt = \mathbf{grad}_s \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \\ \mathbf{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \text{ et } \forall t \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^{pér}(\mathbf{x}) \quad \text{avec } \mathbf{u}^{pér}(\mathbf{x}) \text{ périodique sur } \partial V \\ \int_0^T \int_V \boldsymbol{\sigma}^{(e)}(\mathbf{x}, t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x}, t) dV dt = 1 \end{array} \right. \quad (\text{III.20})$$

l'on ait :

$$\int_0^T \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p(\mathbf{x}, t) dV dt \geq \gamma$$

alors la cellule de base s'adapte pour toute histoire de chargements dans  $\mathcal{D}$ .

9. Mais l'on pourrait tenir un raisonnement analogue à celui de l'approche statique.

**REMARQUE III.2**

On précise que le théorème (III.2) est énoncé pour un chargement en contrainte. Il est cependant valable lorsque le chargement est en déformation : dans ce cas, le déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  doit vérifier (III.20.c) avec  $\mathbf{E} = 0$ .



Le champ de contraintes purement élastiques est toujours conséquence du chargement  $\mathcal{P}(t)$  selon (III.10). Ce champ peut donc être solution, selon le cas, des différents problèmes de localisation élastiques. Concrètement, le chapitre des applications (Chapitre V) ne traitant, par l'approche cinématique, que le cas d'un matériau stratifié, nous ne présentons ici ce couplage que pour le type de cellule de base correspondant, c'est-à-dire une cellule de base tridimensionnelle classique<sup>10</sup>. Le champ  $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$  sera donc uniquement solution de  $P^{(e)}$  représentant soit  $P_{\text{déf}}^{(e),cl}$ , soit  $P_{\text{cont}}^{(e),cl}$ , mais pourrait également être solution de  $P_{\text{déf}}^{(e),cav}$ ,  $P_{\text{cont}}^{(e),cav}$ ,  $P_{\text{déf}}^{(e),plq}$  ou  $P_{\text{cont}}^{(e),plq}$ .

Finalement, l'approche cinématique du couplage assure qu'il y a adaptation de la cellule de base uniquement si l'énergie dissipée plastiquement par cette cellule au cours du chargement est strictement supérieure à l'énergie développée par le chargement  $\mathcal{P}$ , qui est égale, par le principe des travaux virtuels, à l'énergie des contraintes purement élastiques dans le champ du taux de déformations plastiques.

**III.4.2 Problème de minimisation associé**

Tout comme pour l'approche statique, on est alors amené à considérer deux grandes classes de problèmes couplés, selon que l'on impose les déformations ou les contraintes macroscopiques :

- le problème couplé "théorème (III.2) +  $P_{\text{déf}}^{(e)}$ ", noté  $P_{\text{déf}}^{cin}$ ,
- le problème couplé "théorème (III.2) +  $P_{\text{cont}}^{(e)}$ ", noté  $P_{\text{cont}}^{cin}$ ,

l'indice "cin" faisant, cette fois-ci, référence à l'emploi du théorème cinématique de KOITER. On résume ceci sur le schéma (III.7). Le principe du calcul aux états limites est ensuite analogue à celui présenté au paragraphe III.3.4, à ceci près que le problème de maximisation non linéaire sous contraintes devient un problème de minimisation non linéaire sous contraintes. En effet, on a vu que pour qu'il y ait adaptation, il faut que l'énergie dissipée plastiquement par la cellule de base soit supérieure à 1 ; mais, tout système cherchant par nature à dissiper le moins d'énergie possible, le problème d'optimisation va donc consister à rechercher le minimum de cette dissipation plastique, tel que les contraintes (III.20) soient respectées. Une fois la cellule de base et le domaine de chargements donnés, la recherche du coefficient de charge devient donc le problème de minimisation suivant :

---

10. On entend toujours par classique : sans condition limite particulière et sans chargement généralisé.

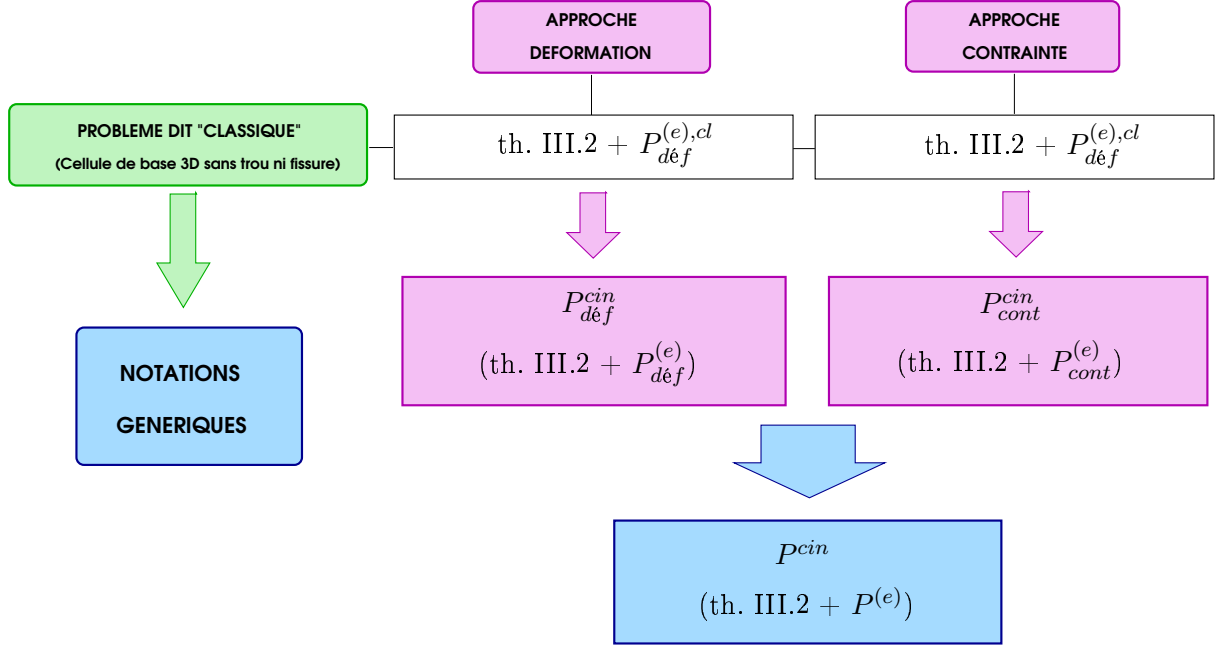


FIGURE III.7 – Schéma de synthèse des différents problèmes traités pour l'approche cinématique du couplage homogénéisation/adaptation

$P^{\text{min}}$  : Trouver  $\alpha^{AD}$  tel que :  $\alpha^{AD} = \min_{\dot{\epsilon}^p, \mathbf{u}^{\text{pér}}, \mathbf{E}} \left( \int_0^T \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \dot{\epsilon}^p(\mathbf{x}, t) dV dt \right)$   
 où  $(\dot{\epsilon}^p, \mathbf{u}^{\text{pér}}, \mathbf{E})$  satisfont :

$$\int_0^T \dot{\epsilon}^p(\mathbf{x}, t) dt = \mathbf{grad}_s \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (\text{III.21a})$$

$$\mathbf{tr} \dot{\epsilon}^p(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \text{ et } \forall t \quad (\text{III.21b})$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^{\text{pér}}(\mathbf{x}) \quad \text{avec } \mathbf{u}^{\text{pér}}(\mathbf{x}) \text{ périodique sur } \partial V \quad (\text{III.21c})$$

$$\int_0^T \int_V \boldsymbol{\sigma}^{(e)}(\mathbf{x}, t) : \dot{\epsilon}^p(\mathbf{x}, t) dV dt = 1 \quad (\text{III.21d})$$

où  $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$  est solution de  $P^{(e)}$ . Une fois encore, si la déformation est imposée, l'équation (III.21c) devient  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{\text{pér}}(\mathbf{x})$ . On est donc bien en présence d'un problème de **minimisation non linéaire sous contraintes**, avec :

- l'énergie  $W$  dissipée plastiquement par la cellule de base comme fonction objectif. Etant toujours en présence de matériaux élastiques parfaitement plastiques obéissant au critère de VON-MISES, cette énergie est définie comme suit :

$$W = \int_0^T \int_V \sigma_0(\mathbf{x}) \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p(\mathbf{x}, t) : \dot{\epsilon}^p(\mathbf{x}, t)} dV dt \quad (\text{III.22})$$

La fonction objectif est donc, cette fois-ci, non linéaire.

- les contraintes, uniquement des contraintes d'égalités, sont par contre linéaires.

Ce problème de minimisation, basé sur le théorème (II.5), consiste à réaliser une approche par l'extérieur des domaines d'adaptation.

### III.5 Exemple illustratif d'un stratifié à déformation imposée

Afin de présenter ces couplages plus concrètement, on étudie l'exemple instructif d'un matériau stratifié pouvant, sous certaines conditions, être résolu de façon entièrement analytique. On se propose donc de calculer les coefficients de charge de ce matériau, vis-à-vis de l'élasticité et de l'adaptation<sup>11</sup>, lorsqu'il est sollicité par une **déformation macroscopique** unidimensionnelle. L'objectif de ce paragraphe est donc de présenter, sur ce cas particulier, les méthodes qui seront mises en œuvre numériquement au chapitre suivant.

#### III.5.1 Position du problème tridimensionnel

On considère (figure III.8) un matériau multicouche, défini par l'alternance selon la direction  $X_3$  de deux couches de matériaux aux propriétés géométriques et mécaniques différentes. Chacune des deux couches est supposée d'épaisseur constante, respectivement notée  $e^1$  et  $e^2$ , et composée d'un matériau homogène isotrope. On donne dans le tableau III.1 les différentes

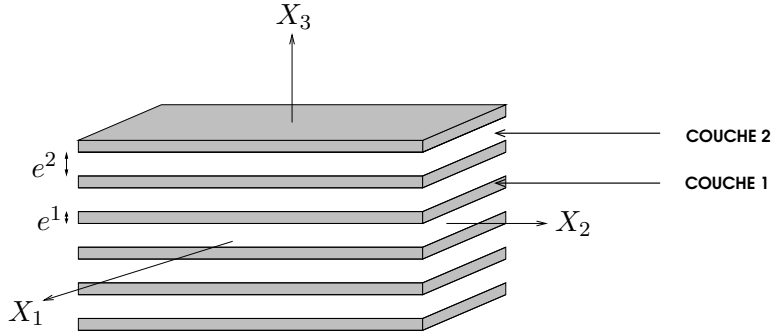


FIGURE III.8 – *Matériau stratifié constitué de deux couches représentatives*

caractéristiques des deux couches, les indices supérieurs <sup>1</sup> et <sup>2</sup> désignant respectivement les propriétés des couches 1 et 2. Chaque matériau est également supposé obéir aux hypothèses du paragraphe II.1.2 auxquelles on ajoute la définition du domaine de plasticité local (III.1).

Afin de pouvoir mener les calculs analytiquement, on sollicite le stratifié par la déformation macroscopique (III.23), ce qui correspond à traiter le cas  $n = 1$  dans la définition (III.8) de  $\mathcal{D}$  :

$$\mathbf{E}_1^0 = (0, 0, 0, 2E_{12}, 0, 0) \quad (\text{III.23})$$

L'objectif est ensuite d'évaluer les coefficients de charge vis-à-vis de deux des types d'analyses : l'élasticité et l'adaptation, respectivement notés  $\alpha^E$  et  $\alpha^{AD}$ . Lors de la recherche des coefficients

<sup>11</sup>. La théorie des charges limites étant énoncée pour un système de forces imposées, calculer le coefficient de charge vis-à-vis de l'analyse limite n'aurait aucun sens ici. Ce coefficient sera par contre calculé au paragraphe III.6, dans lequel le chargement imposé est exprimé en termes de contrainte macroscopique.

Caractéristiques géométriques		
Epaisseur	$e^1 = 0.1$ mm	$e^2 = 0.3$ mm
Caractéristiques mécaniques		
Module de Young	$E^{Y,1} = 210000$ MPa	$E^{Y,2} = 120000$ MPa
Coefficient de Poisson	$\nu^1 = 0.3$	$\nu^2 = 0.27$
Limite d'élasticité	$\sigma_0^1 = 180$ MPa	$\sigma_0^2 = 80$ MPa

TABLEAU III.1 – Caractéristiques des deux couches de matériau

de charge, un problème d'optimisation spécifique est associé à chacun des types d'analyses. La différence principale entre les deux problèmes que nous aurons à traiter ici est la suivante : aucune contrainte résiduelle ne sera considérée dans le problème d'optimisation pour la recherche du coefficient de charge  $\alpha^E$ . Par contre, pour les deux types d'analyses, le chargement extérieur observera les variations suivantes :

$$\mu^- 2E_{12}^0 \leq 2E_{12} \leq \mu^+ 2E_{12}^0 \quad (\text{III.24})$$

pour des valeurs de  $\mu^-$  et  $\mu^+$  respectivement fixées à 0 et 1. La double inégalité (III.24) traduit la spécificité de la théorie de l'adaptation : considérer des chargements variables mais bornés, spécificité qui est étendue au cas de l'élasticité (voir le paragraphe III.5.3 pour des explications complémentaires). Dans ce cas, le domaine  $\mathcal{D}$  est donc défini par :

$$\mathcal{D} = \{E_{ij} \text{ t.q. } \mu^- 2E_{12}^0 \leq 2E_{12} \leq \mu^+ 2E_{12}^0, E_{ij} = 0 \text{ pour les autres composantes}\} \quad (\text{III.25})$$

### III.5.2 Simplification du problème par exploitation des invariances matérielles

On montre, dans ce paragraphe, que l'exploitation des invariances matérielles permet de ramener chacun des problèmes cellulaires, *a priori* 3D, en des problèmes 1D. On en déduit alors certaines propriétés et expressions des déplacements, contraintes et déformations locales.

#### III.5.2.a Choix de la cellule de base

Ce sont les propriétés d'invariance du stratifié dans les deux directions  $X_1$  et  $X_2$  qui permettent d'affirmer que les problèmes sont en fait unidimensionnels. Le stratifié étant constitué par la répétition périodique selon  $X_3$  d'un même bloc contenant une couche représentative de chaque matériau, l'intuition nous incite à choisir une cellule de base parallélépipédique, constituée par la superposition d'une couche  $c^1$  de matériau 1 et d'une couche  $c^2$  de matériau 2, telle la cellule représentée sur la figure III.9. Cette cellule possède bien les propriétés requises, à savoir qu'elle est un motif de base, permettant, par translation dans les trois directions de l'espace, de reconstituer entièrement le matériau stratifié. Cependant, les dimensions  $a$  et  $b$  de cette cellule selon  $x_1$  et  $x_2$  étant quelconques, on montre alors (MAGOARIEC, 2000) que les champs locaux de



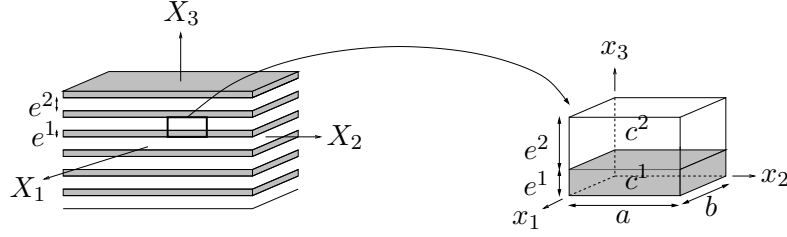


FIGURE III.9 – Cellule de base parallélépipédique

déplacements, de déformations et de contraintes sont uniquement dépendants de  $x_3$ . Le déplacement périodique et les champs de déformations et de contraintes sont donc donnés par :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{pér} : x_3 \in [0; e] \mapsto \mathbf{u}^{pér}(x_3) \\ \boldsymbol{\varepsilon} : x_3 \in [0; e] \mapsto \boldsymbol{\varepsilon}(x_3) \\ \boldsymbol{\sigma} : x_3 \in [0; e] \mapsto \boldsymbol{\sigma}(x_3) \end{cases} \quad (\text{III.26})$$

ce qui implique que la cellule de base  $V$  se réduit au segment  $[0, e]$  (figure III.10) et transforme le problème initialement 3D en un nouveau problème 1D.

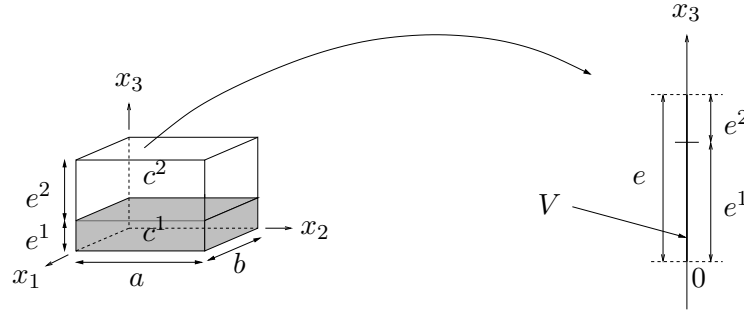


FIGURE III.10 – Cellule de base linéique

### III.5.2.b Conséquences sur les contraintes et déformations locales

Compte-tenu des relations (III.26), l'expression de la déformation microscopique :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E}_1^0 + \mathbf{grad}_s(\mathbf{u}^{pér}) \quad (\text{III.27})$$

devient pour une déformation macroscopique quelconque :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x_3) = \left( E_{11}, E_{22}, E_{33} + u_{3,3}^{pér}(x_3), 2E_{12}, 2E_{23} + u_{2,3}^{pér}(x_3), 2E_{13} + u_{1,3}^{pér}(x_3) \right) \quad (\text{III.28})$$

De même, les contraintes microscopiques n'étant fonction que de  $x_3$ , les équations d'équilibre permettent d'aboutir aux conclusions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} &\Rightarrow \sigma_{i3,3} = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \\ &\Rightarrow \sigma_{i3} \text{ sont constantes par couche} \quad \forall i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

De plus, prises au sens des distributions, les équations d'équilibre assurent que les composantes  $\sigma_{i3}$  sont continues à l'interface entre couches. Etant constantes par couche, elles sont finalement constantes sur toute la cellule de base  $V$ , égales, de par les relations de moyenne, aux contraintes macroscopiques :

$$\Sigma_{i3} = \langle \sigma_{i3} \rangle_V = \sigma_{i3} \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (\text{III.30})$$

Par contre, rien n'assure que les autres composantes de  $\boldsymbol{\sigma}$  soient continues à l'interface entre couches.

De simples considérations matérielles permettent donc de diminuer significativement la dimension des problèmes à considérer ainsi que le nombre d'inconnues par problème.

### III.5.2.c Calcul des contraintes élastiques par couche

Quelle que soit l'approche choisie, statique ou cinématique, pour évaluer les différents coefficients de charge, il faut résoudre le problème de localisation élastique  $P^{(e)}$ , qui se réduit dans notre cas à  $P_{\text{déf}}^{(e)}$  puisque seules les composantes de la déformation macroscopique sont imposées. Les simplifications précédentes permettent alors d'exprimer analytiquement le champ de contraintes purement élastiques  $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$ . On ne donne ici que la méthode pour effectuer ce calcul, le détail étant donné dans MAGOARIEC (2000). Etant dans le cadre de l'élasticité linéaire, on procède par superposition de solutions élémentaires : on impose une déformation macroscopique dont une seule des composantes, notée  $E_{kl}$ , est non nulle et l'on cherche sa contribution au champ de contraintes microscopiques purement élastiques, que l'on note alors  $\boldsymbol{\sigma}_{E_{kl}}^{(e)}$ . La procédure est donc la suivante :

- établir l'expression de  $\boldsymbol{\varepsilon}_{E_{kl}}^{(e)}$  grâce à l'équation (III.28),
- exprimer  $\boldsymbol{\sigma}_{E_{kl}}^{(e)}$  en fonction de  $\mathbf{u}_{E_{kl}}^{\text{pér},(e)}$  grâce à la loi de comportement élastique :

$$\boldsymbol{\sigma}_{E_{kl}}^{(e)} = \mathbf{d} : \boldsymbol{\varepsilon}_{E_{kl}}^{(e)},$$

- calculer les composantes  $\sigma_{i3,E_{kl}}^{(e)}$  grâce à (III.29) et à la périodicité de  $\mathbf{u}_{E_{kl}}^{\text{pér},(e)}$  sur le bord de la cellule de base<sup>12</sup>,
- calculer les composantes manquantes grâce aux composantes de  $\mathbf{u}_{E_{kl}}^{\text{pér},(e)}$  calculées à l'étape précédente.

Après avoir réitéré cette méthode pour tous les couples  $(k, l)$  décrivant l'ensemble des six composantes de la déformation macroscopique imposée sous sa forme générale :

$$\mathbf{E}_1^0 = (E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2E_{12}, 2E_{23}, 2E_{13}) \quad (\text{III.31})$$

on est alors en mesure de donner, par superposition, le champ de contraintes purement élastiques  $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$  induit par cette déformation macroscopique  $\mathbf{E}_1^0$ , sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \boldsymbol{\sigma}_{E_{11}}^{(e)} + \boldsymbol{\sigma}_{E_{22}}^{(e)} + \boldsymbol{\sigma}_{E_{33}}^{(e)} + \boldsymbol{\sigma}_{E_{12}}^{(e)} + \boldsymbol{\sigma}_{E_{23}}^{(e)} + \boldsymbol{\sigma}_{E_{13}}^{(e)} \quad (\text{III.32})$$

<sup>12</sup>. Concrètement, compte-tenu de la géométrie linéique de la cellule de base, ceci se traduit par :  $\mathbf{u}_{E_{kl}}^{\text{pér}}(0) = \mathbf{u}_{E_{kl}}^{\text{pér}}(e)$ .

On montre que :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^{(e)i} &= a(d_1^i, d_2^i, e^1, e^2) E_{11} + b(d_1^i, d_2^i, e^1, e^2) E_{22} + c(d_1^i, d_2^i, e^1, e^2) E_{33} \\
 \sigma_{22}^{(e)i} &= b(d_1^i, d_2^i, e^1, e^2) E_{11} + a(d_1^i, d_2^i, e^1, e^2) E_{22} + c(d_1^i, d_2^i, e^1, e^2) E_{33} \\
 \sigma_{33}^{(e)i} &= f(d_1^i, d_2^i, e^1, e^2) (E_{11} + E_{22}) + g(d_1^i, d_2^i, e^1, e^2) E_{33} \\
 \sigma_{12}^{(e)i} &= d_3^i 2E_{12} \\
 \sigma_{23}^{(e)i} &= h(d_3^i, e^1, e^2) 2E_{23} \\
 \sigma_{13}^{(e)i} &= h(d_3^i, e^1, e^2) 2E_{13}
 \end{aligned} \tag{III.33}$$

où l'indice supérieur  $i$  prend la valeur 1 dans la couche 1, pour laquelle  $x_3 \in [0, e^1]$ , et la valeur 2 dans la couche 2, pour laquelle  $x_3 \in [e^1, e]$ . Les expressions détaillées des fonctions  $a, b, c, f, g$  et  $h$  sont données en annexe C. Les coefficients  $d_1^i, d_2^i$  et  $d_3^i$  obéissent à la même convention d'indice et sont les différents coefficients du tenseur d'élasticité  $\mathbf{d}$  dans chacune des deux couches, qui s'écrit sous sa forme matricielle :

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1^i & d_2^i & d_2^i & 0 & 0 & 0 \\ d_2^i & d_1^i & d_2^i & 0 & 0 & 0 \\ d_2^i & d_2^i & d_1^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_3^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_3^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3^i \end{bmatrix} \tag{III.34}$$

avec :

$$d_1^i = \frac{E^{Y,i}(1 - \nu^i)}{(1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i)}, \quad d_2^i = \frac{E^{Y,i}\nu^i}{(1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i)} \quad \text{et} \quad d_3^i = \frac{E^{Y,i}}{2(1 + \nu^i)} \tag{III.35}$$

Ce calcul met donc en lumière le fait que les composantes de  $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$  qui ne sont pas constantes sur la cellule de base, restent tout de même, du fait de l'homogénéité de chaque couche, constantes par couche.

#### III.5.2.d Propriétés des contraintes résiduelles

Les propriétés du champ de contraintes total  $\boldsymbol{\sigma}$  et du champ de contraintes purement élastiques  $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$  se répercutent alors sur les contraintes résiduelles. En effet, la décomposition de base de l'adaptation :

$$\boldsymbol{\sigma}(x_3, t) = \boldsymbol{\sigma}^{(e)}(x_3, t) + \boldsymbol{\rho}(x_3) \tag{III.36}$$

associée au fait que les composantes  $\sigma_{i3}$  et  $\sigma_{i3}^{(e)}$  sont constantes sur la cellule de base permettent d'énoncer une première conclusion : les composantes  $\rho_{i3}$  sont constantes sur la cellule de base. D'autre part, ayant montré que les composantes  $\sigma_{11}^{(e)}, \sigma_{22}^{(e)}$  et  $\sigma_{12}^{(e)}$  des contraintes purement

élastiques sont constantes par couche, on suppose qu'il en est de même pour les composantes équivalentes de  $\boldsymbol{\rho}$  :  $\rho_{11}$ ,  $\rho_{22}$  et  $\rho_{12}$ . Pour résumer, on a donc :

$$\begin{cases} \rho_{i3} & \text{constantes sur } V \text{ pour } i = 1, 2, 3 \\ \rho_{\alpha\beta} & \text{constantes par couche pour } (\alpha, \beta) \in (1, 2)^2 \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

### III.5.3 Remarques préliminaires aux calculs analytiques

On apporte ici quelques précisions de notations nécessaires lors des résolutions analytiques présentées au cours des deux paragraphes suivants. Le chargement  $2E_{12}$  variant entre les bornes prescrites par (III.25), les variables décrivant les problèmes traités :

- les champs  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$  pour l'approche statique,
- les champs  $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  et  $\mathbf{u}$  pour l'approche cinématique,

dépendent alors implicitement du temps, c'est-à-dire des différentes valeurs prises par  $2E_{12}$  entre  $\mu^- 2E_{12}^0$  et  $\mu^+ 2E_{12}^0$ . De même, les composantes des contraintes étant soit constantes sur la cellule de base, soit constantes par couche, elles ne prennent au maximum que deux valeurs différentes lorsque  $x_3$  décrit  $[0; e]$ . Afin de matérialiser ces dépendances temporelle et spatiale, on utilise respectivement quel que soit le type d'analyse (élasticité ou adaptation) :

- les *points de charge* déjà évoqués au paragraphe I.1.5.a, traduisant une discrétisation<sup>13</sup> du temps. Ces points sont nécessaires à la théorie de l'adaptation en vertu du théorème (I.1) de KOENIG ET KLEIBER, qui énonce que pour assurer l'adaptation de la cellule de base –qui, on le rappelle, est considérée comme une microstructure– dans tout le domaine  $\mathcal{D}$ , il suffit de l'assurer pour des trajets de chargements passant par les sommets de ce domaine, c'est-à-dire pour les singletons  $\{\mu^- 2E_{12}^0\}$  et  $\{\mu^+ 2E_{12}^0\}$ . Les contraintes d'optimisation doivent donc être vérifiées pour les instants  $t_j$ , tels que :

$$\mathcal{P}(t_j) = P_j \quad j = 1..2^n \quad (\text{III.38})$$

Dans notre étude,  $n$  est fixé à 1 puisque le domaine  $\mathcal{D}$  se trouve restreint au segment  $[\mu^- 2E_{12}^0, \mu^+ 2E_{12}^0]$ . Le nombre de points de charge à considérer est donc de 2 :

$$\begin{cases} P_1 = \mu^- 2E_{12}^0 = 0 \\ P_2 = \mu^+ 2E_{12}^0 = 2E_{12}^0 \end{cases} \quad (\text{III.39})$$

Par analogie, la transposition de ce théorème au cas de l'étude élastique permet de conclure que pour assurer le comportement élastique de la cellule de base pour toute déformation macroscopique comprise entre  $\mu^- 2E_{12}^0$  et  $\mu^+ 2E_{12}^0$ , il suffit de l'assurer pour les *points de charge* notés  $P_j$ ,  $j = 1..2^n$ .

- l'indice supérieur  $i$ , repérant chacune des deux couches selon la convention suivante :  $i = 1$  dans la couche 1 et  $i = 2$  dans la couche 2.

---

13. Cette notion de discrétisation temporelle sera détaillée au chapitre IV.

On choisit donc de travailler avec les notations suivantes : pour tout  $2E_{12}$  variant entre  $\mu^- 2E_{12}^0$  et  $\mu^+ 2E_{12}^0$  et pour tout  $x_3$  variant dans  $[0; e]$ , on note :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma(x_3, t_j) \equiv \sigma^i(P_j) & \text{pour } j = 1..2^n \text{ et pour } i = 1, 2 \\ \sigma^{(e)}(x_3, t_j) \equiv \sigma^{(e)i}(P_j) & \text{pour } j = 1..2^n \text{ et pour } i = 1, 2 \\ \dot{\varepsilon}^p(x_3, t_j) \equiv \dot{\varepsilon}^{pi}(P_j) & \text{pour } j = 1..2^n \text{ et pour } i = 1, 2 \\ \rho(x_3) \equiv \rho^i & \text{pour } i = 1, 2 \end{array} \right. \quad (\text{III.40})$$

Les variations continues étant, par ces notations, ramenées à des variations discrètes, on redéfinit les sommes continues par des sommes discrètes, afin de pouvoir mener les calculs analytiquement. Soient donc fonctions  $f$  et  $g$  constantes par couche et définies par :

$$\begin{aligned} f : t \in \mathbb{R} &\mapsto f(t) \\ g : x_3 \in [0, e] &\mapsto g(x_3) \end{aligned} \quad (\text{III.41})$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) dt &= \sum_{j=1}^{2^n} f(P_j) \\ \int_V g(x_3) dx_3 &= \sum_{i=1}^2 e^i g^i \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

Dans le cas général d'une fonction  $h$ , constante par couche et définie par :

$$h : (x_3, t) \in [0, e] \times \mathbb{R} \mapsto h(x_3, t) \quad (\text{III.43})$$

qui peut être, pour donner un exemple se rapportant à notre étude, la puissance dissipée par unité de volume, on a alors :

$$\int_0^T \int_V h(x_3, t) dx_3 dt = \sum_{j=1}^{2^n} \sum_{i=1}^2 e^i h^i(P_j) \quad (\text{III.44})$$

### III.5.4 Approche statique pour une sollicitation en cisaillement pur

L'exploitation des invariances matérielles du problème 3D nous permettent de poser des problèmes d'optimisation simplifiés, en ce sens qu'ils peuvent être résolus analytiquement, afin de résoudre les problèmes aux états limites correspondants. On utilise, dans un premier temps, l'approche statique pour formuler les couplages à l'origine de ces problèmes d'optimisation, qui deviennent alors des problèmes de maximisation.

#### III.5.4.a Problèmes de maximisation

Comme précisé par (III.23), le chargement imposé est unidimensionnel puisque seule la composante  $2E_{12}$  de la déformation macroscopique imposée est non nulle. En observant la structure de la solution purement élastique (III.33), on constate que ce type de déformation macroscopique induit un champ de contraintes  $\sigma^{(e)}$  qui est également unidimensionnel. On a en effet :

$$\text{Si seule } 2E_{12} \neq 0, \text{ alors } \sigma^{(e)i} = \left( 0, 0, 0, \sigma_{12}^{(e)i}, 0, 0 \right) \text{ avec } \sigma_{12}^{(e)i} = 2E_{12} d_3^i \quad (\text{III.45})$$

Par conséquence, le champ de contraintes résiduelles  $\boldsymbol{\rho}$  est également cherché sous la forme

$$\boldsymbol{\rho}^i = (0, 0, 0, \rho_{12}^i, 0, 0) \quad (\text{III.46})$$

Sur la base des équations (III.45) et (III.46), les problèmes de maximisation associés aux deux types d'analyses peuvent se mettre sous la forme générale  $P^{max}$ , où l'on note  $\alpha^c$  le coefficient de charge, qui peut être le coefficient d'élasticité ou d'adaptation :

$P^{max}$  : Trouver  $\alpha^c$  tel que :  $\alpha^c = \max_{\boldsymbol{\rho}, \alpha}(\alpha)$  où  $\boldsymbol{\rho}$  satisfait :

$$\mathcal{F} \left( \alpha \sigma_{12}^{(e)i}(P_j) + \rho_{12}^i, \sigma_0^i \right) \leq 0 \quad \forall i = 1, 2 \text{ et } \forall j = 1..2^n \quad (\text{III.47a})$$

$$P^{(r)} \quad (\text{III.47b})$$

sachant que l'ensemble des contraintes résiduelles  $\boldsymbol{\rho}^i$  solution de  $P^{(r)}$  satisfait :

- $\boldsymbol{\rho}^i = 0$  pour tout  $i = 1, 2$ , si l'on étudie la résistance vis-à-vis de l'élasticité, pour laquelle aucune contrainte résiduelle ne se développe dans la cellule de base,
- le système d'équations (III.48) lorsque l'on travaille vis-à-vis de la théorie de l'adaptation :

$$\rho_{k3,3}^i = 0 \quad \forall i = 1, 2 \text{ et } \forall k = 1, 2, 3 \quad (\text{III.48a})$$

$$\rho_{k3}^1(0) = \rho_{k3}^2(e) \quad \forall k = 1, 2, 3 \quad (\text{III.48b})$$

où l'égalité (III.48b) est issue de la l'anti-périodicité de  $\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n}$  sur le bord de la cellule de base  $\partial V = \{0; e\}$ . Ce système ne sera cependant pas utile dans notre étude puisque seule les composantes  $\rho_{12}^i$  sont supposées non nulles<sup>14</sup>, ce qui ne serait pas le cas si l'on imposait, par exemple, la déformation macroscopique  $\mathbf{E}_1^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 2E_{13})$ .

### REMARQUE III.3

On pourrait rechercher le champ de contraintes résiduelles sous la forme plus générale :

$$\boldsymbol{\rho}^i = (\rho_{11}^i, \rho_{22}^i, \rho_{33}^i, \rho_{12}^i, \rho_{23}^i, \rho_{13}^i) \quad (\text{III.49})$$

On montrerait alors que la solution du problème  $P^{max}$  conduit à ne considérer que la forme (III.46).  $\square$

#### III.5.4.b Détermination des coefficients de charge

Afin de résoudre  $P^{max}$ , on explicite tout d'abord les contraintes d'inégalités (III.47a). Le critère de VON-MISES est donnée par l'expression générale :

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{33} + 3\sigma_{12}^2 + 3\sigma_{23}^2 + 3\sigma_{13}^2 - \sigma_0^2 \quad (\text{III.50})$$

14. On remarquera aussi que cette supposition est en accord avec les conditions imposées par ce système.

qui, compte-tenu du paragraphe précédent, devient dans notre cas :

$$\mathcal{F} \left( \alpha \sigma_{12}^{(e)i}(P_j) + \rho_{12}^i, \sigma_0^i \right) = 3 \left( \alpha \sigma_{12}^{(e)i}(P_j) + \rho_{12}^i \right)^2 - (\sigma_0^i)^2 \quad (\text{III.51})$$

Les contraintes d'inégalités possèdent donc une expression différente par couche et par point de charge :

$$-\frac{\sigma_0^i}{\sqrt{3}} \leq \alpha \sigma_{12}^{(e)i}(P_j) + \rho_{12}^i \leq \frac{\sigma_0^i}{\sqrt{3}} \quad \forall i = 1,2 \text{ et } \forall j = 1..2^n \quad (\text{III.52})$$

C'est en travaillant sur cette expression que les coefficients  $\alpha^E$  et  $\alpha^{AD}$  sont déterminés.

■ *Problème d'élasticité : détermination de  $\alpha^E$*

Evaluer le coefficient de charge  $\alpha^E$ , tel que  $\alpha^E 2E_{12}$  soit un chargement supportable vis-à-vis de l'élasticité pour toute valeur de  $\alpha^E 2E_{12}$  comprise entre  $\alpha^E \mu^- 2E_{12}^0$  et  $\alpha^E \mu^+ 2E_{12}^0$ , revient à déterminer le maximum des coefficients positifs tel que les critères de VON-MISES (III.51) soient satisfaits en chaque couche et pour chaque point de charge. De la définition (III.39) des points de charge, on déduit les valeurs des contraintes purement élastiques  $\sigma_{12}^{(e)i}(P_j)$  dans chacune des deux couches :

$$\begin{cases} \sigma_{12}^{(e)i}(P_1) = 0 * d_3^i = 0 \\ \sigma_{12}^{(e)i}(P_2) = 2E_{12}^0 d_3^i \end{cases} \quad (\text{III.53})$$

Le problème de maximisation devient alors :

$P^{max,E}$  : Trouver  $\alpha^e$  tel que :  $\alpha^E = \max_{\alpha}(\alpha)$  satisfaisant :

$$\alpha > 0 \quad (\text{III.54a})$$

$$-\frac{\sigma_0^i}{\sqrt{3}} \leq 0 \leq \frac{\sigma_0^i}{\sqrt{3}} \quad i = 1,2 \quad (\text{III.54b})$$

$$-\frac{\sigma_0^i}{\sqrt{3}} \leq 2E_{12}^0 d_3^i \leq \frac{\sigma_0^i}{\sqrt{3}} \quad i = 1,2 \quad (\text{III.54c})$$

où les équations (III.54b) (respectivement (III.54c)) sont les expressions du critère de VON-MISES dans les couches 1 et 2 pour le point de charge  $P_1$  (respectivement  $P_2$ ). On pose :

$$s^i = \frac{\sigma_0^i}{\sqrt{3} 2E_{12}^0 d_3^i} \quad (\text{III.55})$$

Compte-tenu des valeurs numériques données dans le tableau (III.1), le coefficient  $s^2$  est donc l'unique coefficient satisfaisant toutes les conditions, ce qui implique que la couche 2 est la couche limitante vis-à-vis de l'élasticité. On a finalement :

$$\alpha^E = \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{3} 2E_{12}^0 d_3^2} \quad (\text{III.56})$$

■ *Problème d'adaptation : détermination de  $\alpha^{AD}$*

Le problème d'adaptation étant défini par les mêmes variations de  $2E_{12}$  que le problème élastique, on procède de même pour le résoudre. On considère donc les mêmes points de charge  $P_1$  et  $P_2$ ; par contre, l'adaptation relevant de la plasticité, il est nécessaire de prendre en compte les contraintes résiduelles dans l'expression des critères de VON-MISES.

$P^{max,AD}$  : Trouver  $\alpha^{AD}$  tel que :  $\alpha^{AD} = \max_{\rho_{12}^i, \alpha}(\alpha)$  où  $(\rho_{12}^i, \alpha)$  satisfait :

$$\alpha > 0 \quad (III.57a)$$

$$-\frac{\sigma_0^i}{\sqrt{3}} \leq \rho_{12}^i \leq \frac{\sigma_0^i}{\sqrt{3}} \quad i = 1, 2 \quad (III.57b)$$

$$-\frac{\sigma_0^i}{\sqrt{3}} \leq \alpha \, 2E_{12}^0 d_3^i + \rho_{12}^i \leq \frac{\sigma_0^i}{\sqrt{3}} \quad i = 1, 2 \quad (III.57c)$$

On représente sur la figure III.11, l'ensemble des coefficients satisfaisant les contraintes d'optimisation pour la couche  $i$ . Pour chaque couche, on déduit graphiquement le coefficient maximal

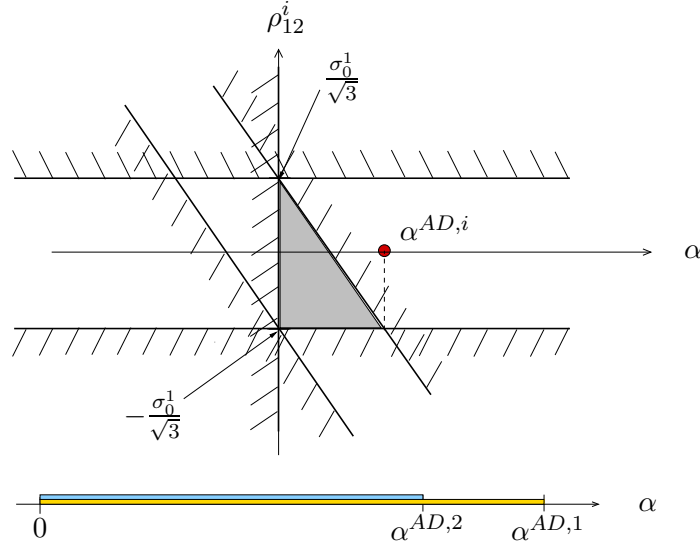


FIGURE III.11 – *Solution par couche du problème d'adaptation à déformation imposée*

satisfaisant toutes les contraintes :

$$\alpha^{AD,i} = \frac{2 \sigma_0^i}{\sqrt{3} \, 2E_{12}^0 d_3^i} = 2 s^i \quad \text{où } s^i \text{ est défini par (III.55)} \quad (III.58)$$

Reste ensuite à rechercher la couche limitante afin d'en déduire  $\alpha^{AD}$ , ce qui, compte-tenu de la relation d'ordre entre  $s^1$  et  $s^2$ , donne :

$$\alpha^{AD} = \min(\alpha^{AD,1}, \alpha^{AD,2}) = \min(2 s^1, 2 s^2) = 2 s^2 \quad (III.59)$$

On a finalement :

$$\alpha^{AD} = 2 \alpha^E = \frac{2 \sigma_0^2}{\sqrt{3} \, 2E_{12}^0 d_3^2} \quad (III.60)$$



La couche limitante est toujours la couche possédant la plus faible limite élastique. Les calculs analytiques montrent donc dans ce cas que le coefficient de charge à l'adaptation est deux fois plus important que le coefficient de charge à l'élasticité, ce qui prouve l'intérêt de cette théorie.

### III.5.5 Approche cinématique pour une sollicitation en cisaillement pur

L'objectif de ce paragraphe est d'utiliser l'approche cinématique de l'adaptation, afin d'étudier le même problème que précédemment et de confirmer ainsi le résultat  $\alpha^{AD}$  obtenu.

#### III.5.5.a Formulation du couplage

Méthodes statique et cinématique ne diffèrent qu'au moment d'exprimer le problème d'optimisation. En effet, dans le cas de l'approche cinématique, le problème d'optimisation devient un problème de minimisation non linéaire sous contraintes (voir le paragraphe III.4.2). Les données des problèmes restent donc les mêmes, à savoir :

- une cellule de base linéique : le segment  $[0, e]$ , caractérisée par les propriétés du tableau (III.1),
- une déformation macroscopique imposée  $\mathbf{E}_1^0$  sous la forme (III.23),
- un champ de contraintes purement élastiques  $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$ , induit par  $\mathbf{E}_1^0$  et évalué à partir des formules (III.33).

Compte-tenu des propriétés particulières du champ  $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$ , on cherche le taux de déformations plastiques sous la forme :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p^i} = (0, 0, 0, 2\dot{\varepsilon}_{12}^{p^i}, 0, 0) \quad (\text{III.61})$$

En utilisant les propriétés des champs  $\mathbf{u}^{pér}$  et  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ , l'énoncé du problème de minimisation (III.21) devient alors :

$P^{min, AD}$  : Trouver  $\alpha^{AD}$  tel que :  $\alpha^{AD} = \min_{\dot{\varepsilon}_{12}^{p^i}, \mathbf{u}^{pér^i}, 2E_{12}} W(\sigma_0^i, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p^i})$  où  $(\dot{\varepsilon}_{12}^{p^i}, \mathbf{u}^{pér^i}, 2E_{12})$

satisfont :

$$\sum_{j=1}^{2^n} 2\dot{\varepsilon}_{12}^{p^i}(P_j) = \left( \frac{\partial u_1^{pér}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{pér}}{\partial x_1} \right) + 2E_{12} \quad \forall i = 1, 2 \quad (\text{III.62a})$$

$$\text{tr } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p^i}(P_j) = 0 \quad \forall i = 1, 2 \text{ et } \forall j = 1..2^m \quad (\text{III.62b})$$

$$\mathbf{u}^{pér}(0) = \mathbf{u}^{pér}(e) \quad (\text{III.62c})$$

$$\sum_{j=1}^{2^n} \sum_{i=1}^2 e^i \boldsymbol{\sigma}^{(e)^i}(P_j) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p^i}(P_j) = 1 \quad (\text{III.62d})$$

où l'énergie dissipée plastiquement au cours du cycle de chargements constitué des  $2^n$  points de charge est définie par :

$$W(\sigma_0^i, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p^i}) = \sum_{j=1}^{2^n} \sum_{i=1}^2 e^i \sigma_0^i \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p^i}(P_j) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p^i}(P_j)} \quad (\text{III.63})$$

Les remarques suivantes permettent de simplifier encore d'avantage ce problème d'optimisation :

- le chargement extérieur étant une *déformation macroscopique*, en vertu de la remarque (III.2), on applique la condition suivante :

$$2E_{12} = 0 \quad \text{dans (III.62a)} \quad (\text{III.64})$$

De plus, le déplacement périodique ne dépendant que de la variable  $x_3$ , on a :

$$\frac{\partial u_1^{pér}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{pér}}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{III.65})$$

La contrainte d'optimisation linéaire (III.62a) se simplifie donc en :

$$\sum_{j=1}^{2^n} \dot{\varepsilon}_{12}^{p^i}(P_j) = 0 \quad \forall i = 1, 2 \quad (\text{III.66})$$

- le fait que seule la quatrième composante<sup>15</sup> des tenseurs de contraintes et déformations soit non nulle, rend la contrainte (III.62b) trivialement vérifiée, et permet de réécrire la fonction objectif (III.63) et la contrainte (III.62d) :

$$W(\sigma_0^i, \dot{\varepsilon}^{p^i}) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^{2^m} \sum_{i=1}^2 e^i \sigma_0^i |\dot{\varepsilon}_{12}^{p^i}(P_j)| \quad (\text{III.67})$$

$$2 \sum_{j=1}^{2^n} \sum_{i=1}^2 e^i \sigma_{12}^{(e)i}(P_j) \dot{\varepsilon}_{12}^{p^i}(P_j) = 1 \quad (\text{III.68})$$

#### REMARQUE III.4

Comme pour l'approche statique, on pourrait rechercher le champ de taux de déformations plastiques sous la forme plus générale :

$$\dot{\varepsilon}^{p^i} = \left( \dot{\varepsilon}_{11}^{p^i}, \dot{\varepsilon}_{22}^{p^i}, \dot{\varepsilon}_{33}^{p^i}, 2\dot{\varepsilon}_{12}^{p^i}, 2\dot{\varepsilon}_{23}^{p^i}, 2\dot{\varepsilon}_{13}^{p^i} \right) \quad (\text{III.69})$$

On montrerait alors que la solution du problème  $P^{min}$  conduit à ne considérer que la forme (III.61).  $\square$

#### III.5.5.b Détermination analytique du coefficient de charge à l'adaptation

On énonce et résout, compte-tenu des simplifications du paragraphe précédent, le problème de minimisation  $P^{min,AD}$ , dérivant du problème d'adaptation de la cellule de base hétérogène :

$P^{min,AD}$  : Trouver  $\alpha^{AD}$  tel que :

$$\alpha^{AD} = \min_{\dot{\varepsilon}_{12}^{p^i}(P_j)} \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0^1 e^1 \left[ |\dot{\varepsilon}_{12}^{p^1}(P_1)| + |\dot{\varepsilon}_{12}^{p^1}(P_2)| \right] + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0^2 e^2 \left[ |\dot{\varepsilon}_{12}^{p^2}(P_1)| + |\dot{\varepsilon}_{12}^{p^2}(P_2)| \right]$$

15. Par référence à la représentation des tenseurs symétriques comme des vecteurs à six composantes.

où les  $\varepsilon_{12}^{p^i}(P_j)$ ,  $i = 1, 2$  et  $j = 1..2^n$  satisfont :

$$\hat{\varepsilon}_{12}^{p^i}(P_1) + \hat{\varepsilon}_{12}^{p^i}(P_2) = 0 \quad i = 1, 2 \quad (\text{III.70a})$$

$$2 \left[ e^1 \sigma_{12}^{(e)1}(P_2) \varepsilon_{12}^{p^1}(P_2) + e^2 \sigma_{12}^{(e)2}(P_2) \varepsilon_{12}^{p^2}(P_2) \right] = 1 \quad (\text{III.70b})$$

A partir de (III.70a) et (III.70b), on déduit une nouvelle expression de la fonction objectif, ce qui transforme le problème de minimisation avec contraintes en le problème de minimisation sans contraintes suivant :

$$\alpha^{AD} = \min_{\varepsilon_{12}^{p^2}(P_2)} \frac{4e^1 \sigma_0^1}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2e^1 \sigma_{12}^{(e)1}(P_2)} - \frac{e^2 \sigma_{12}^{(e)2}(P_2)}{e^1 \sigma_{12}^{(e)1}(P_2)} \varepsilon_{12}^{p^2}(P_2) \right| + \frac{4e^2 \sigma_0^2}{\sqrt{3}} \left| \varepsilon_{12}^{p^2}(P_2) \right| \quad (\text{III.71})$$

L'étude des variations de cette fonction objectif, réalisée à partir des valeurs numériques du tableau (III.1), montre que le minimum est atteint pour :

$$\hat{\varepsilon}_{12}^{p^2}(P_2) = \frac{1}{2e^2 \sigma_{12}^{(e)2}(P_2)} \quad (\text{III.72})$$

Cette valeur ré-injectée dans la fonction objectif fournit le minimum suivant :

$$\alpha^{AD} = \frac{2\sigma_0^2}{\sqrt{3} \sigma_{12}^{(e)2}(P_2)} = \frac{2\sigma_0^2}{\sqrt{3} 2E_{12}^0 d_3^2} \quad (\text{III.73})$$

#### REMARQUE III.5

On retrouve l'égalité entre le coefficient de charge à l'adaptation calculé à partir de l'approche statique, donné par (III.60), et celui qui vient d'être calculé à partir de l'approche cinématique. Ceci justifie, *a posteriori*, les expressions (III.46) et (III.61), respectivement choisies pour les contraintes résiduelles et les taux de déformations plastiques. □

### III.6 Exemple illustratif d'un stratifié à contrainte imposée

L'objectif de ce paragraphe est identique à l'objectif du paragraphe précédent : présenter les couplages simplement, au travers d'un problème 1D pouvant être résolu analytiquement. Cependant, afin d'illustrer les deux approches *contrainte* et *déformation*, présentées au chapitre I, on étudie ici le même matériau qu'au paragraphe III.5, à ceci près que la sollicitation est désormais imposée sous la forme d'une **contrainte macroscopique**. Ceci nous permet également de mettre en exergue, sur un exemple simple, les principales différences entre les deux approches, afin de mieux appréhender le traitement numérique de ces méthodes sur des cas tridimensionnels.

#### III.6.1 Problème 3D, chargement imposé et points de charges

Le stratifié, dont les caractéristiques géométriques et matérielles restent celles définies dans le tableau III.1, est donc soumis au chargement suivant :

$$\Sigma_1^0 = (0, 0, 0, \Sigma_{12}, 0, 0) \quad (\text{III.74})$$

Contrairement à l'approche déformation, le chargement de type contrainte macroscopique autorise ici à considérer les trois types d'analyses : élasticité, analyse limite et adaptation, qui diffèrent les uns des autres par :

- les contraintes résiduelles qui sont nulles pour le problème élastique,
- les variations du chargement imposé qui, comme pour l'approche déformation, sont définies par :

$$\mu^- \Sigma_{12}^0 \leq \Sigma_{12} \leq \mu^+ \Sigma_{12}^0 \quad \text{pour l'élasticité et l'adaptation} \quad (\text{III.75})$$

où  $\mu^- = 0$  et  $\mu^+ = 1$ . Par contre, l'analyse limite étant caractérisée par un chargement proportionnel, on a dans ce cas :

$$\Sigma_{12} = \Sigma_{12}^0 \quad \text{pour l'analyse limite} \quad (\text{III.76})$$

C'est là la différence principale entre l'adaptation et l'analyse limite : l'aspect variable des chargements considérés dans la théorie de l'adaptation est matérialisé par deux points de charge, alors que l'aspect proportionnel du chargement de l'analyse limite est représenté par un unique point de charge. Afin de désigner les trois problèmes par les mêmes notations, on pose donc :

$$\mathcal{P}(t_j) = P_j \quad j = 1..2^m \quad (\text{III.77})$$

où  $m = n$  pour l'adaptation et l'élasticité et  $m = 0$  pour l'analyse limite.

### III.6.2 Calcul des contraintes élastiques par couche

L'approche cinématique, tout comme l'approche statique, nécessite la connaissance des contraintes purement élastiques, notées  $\sigma^{(e)}$ , régnant dans la cellule de base du fait de la contrainte macroscopique imposée. Par des raisonnements analogues à ceux présentés aux paragraphes III.5.2.a et III.5.2.b, on montrerait que les contraintes et déformations microscopiques (purement élastiques, résiduelles, totales) sont, encore une fois, constantes par couche. L'idée est donc de se baser sur les résultats du paragraphe III.5.2.c afin d'en déduire les expressions analytiques de  $\sigma^{(e)}$  dans chacune des deux couches et en chaque point de charge. Ce champ sera de la forme (III.78), puisque seule la composante  $\Sigma_{12}$  de la contrainte macroscopique est imposée non nulle.

$$\sigma^{(e)i} = \left( 0, 0, 0, \sigma_{12}^{(e)i}, 0, 0 \right) \quad (\text{III.78})$$

On cherche donc la loi de localisation (voir paragraphes I.3.2.c et I.3.3), donnant l'expression de  $\sigma_{12}^{(e)i}$  en fonction de  $\Sigma_{12}$ . Pour ce faire, on utilise l'équation (III.33) :

$$\sigma_{12}^{(e)i} = d_3^i 2E_{12} \quad \forall i = 1,2 \quad (\text{III.79})$$

Il suffit donc de savoir exprimer  $2E_{12}$  en fonction de  $\Sigma_{12}$ , c'est-à-dire de connaître une partie de la loi de comportement macroscopique homogénéisée, afin d'obtenir la relation de localisation recherchée. C'est une fois de plus la spécificité du problème, qui est de se ramener à un problème

1D, qui permet de donner facilement ces relations. En effet, de par la définition des relations de moyenne, on a :

$$\Sigma_{12} = \left\langle \sigma_{12}^{(e)} \right\rangle_V = \frac{1}{e^1 + e^2} \sum_{i=1}^2 e^i \sigma_{12}^{(e)i} \quad (\text{III.80})$$

Ce qui, d'après l'équation (III.79), devient :

$$\Sigma_{12} = \frac{e^1 d_3^1 + e^2 d_3^2}{e^1 + e^2} 2E_{12} \quad (\text{III.81})$$

On en conclut donc, une fois la relation (III.81) inversée, la loi de localisation suivante :

$$\sigma^{(e)i} = d_3^i \frac{e^1 + e^2}{e^1 d_3^1 + e^2 d_3^2} \Sigma_{12} \quad (\text{III.82})$$

### III.6.3 Approche statique pour une sollicitation en cisaillement pur

Les données nécessaires à l'expression des problèmes de maximisation étant disponibles, on exprime désormais les trois types de couplages. La différence notable entre ces trois problèmes d'optimisation et ceux présentés au paragraphe précédent, provient du chargement imposé. En effet, le chargement actuel étant à contrainte macroscopique imposée, on a :

$$\Sigma_{12} = \left\langle \sigma_{12}^{(e)} \right\rangle_V \quad (\text{III.83})$$

Ceci implique d'après la décomposition (II.15), que les contraintes résiduelles sont globalement nulles (on suppose toujours que  $\rho$  est de la forme (III.46)) :

$$\langle \rho_{12} \rangle_V = 0 \quad (\text{III.84})$$

De ce fait, si l'énoncé du problème de maximisation élastique reste inchangé, les problèmes de maximisation d'analyse limite et d'adaptation présentent, par contre, une équation supplémentaire par rapport aux énoncés de l'approche déformation. Quoi qu'il en soit, ces trois problèmes sont toujours regroupés sous le terme générique :  $P^{max}$ .

#### III.6.3.a Problème d'élasticité : détermination de $\alpha^E$

Compte-tenu du fait que, pour résoudre le problème d'élasticité, on attribue aux points de charge  $P_1$  et  $P_2$  les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} P_1 = \mu^- \Sigma_{12}^0 = 0 \\ P_2 = \mu^+ \Sigma_{12}^0 = \Sigma_{12}^0 \end{cases} \quad (\text{III.85})$$

et compte-tenu de la loi de localisation (III.82), le champ de contraintes purement élastiques est défini, en chacune des deux couches de stratifié, par :

$$\begin{cases} \sigma_{12}^{(e)i}(P_1) = d_3^i \frac{e^1 + e^2}{e^1 d_3^1 + e^2 d_3^2} * 0 = 0 \\ \sigma_{12}^{(e)i}(P_2) = d_3^i \frac{e^1 + e^2}{e^1 d_3^1 + e^2 d_3^2} \Sigma_{12}^0 \end{cases} \quad (\text{III.86})$$

Le problème de maximisation devient alors :

$P^{max,E}$  : Trouver  $\alpha^E$  tel que :  $\alpha^E = \max_{\alpha}(\alpha)$  satisfaisant :

$$\alpha > 0 \quad (III.87a)$$

$$-\frac{\sigma_0^i}{\sqrt{3}} \leq 0 \leq \frac{\sigma_0^i}{\sqrt{3}} \quad i = 1, 2 \quad (III.87b)$$

$$-\frac{\sigma_0^i}{\sqrt{3}} \leq d_3^i \frac{e^1 + e^2}{e^1 d_3^1 + e^2 d_3^2} \Sigma_{12}^0 \leq \frac{\sigma_0^i}{\sqrt{3}} \quad i = 1, 2 \quad (III.87c)$$

où les équations (III.87b) (respectivement (III.87c)) sont les expressions du critère de VON-MISES dans les couches 1 et 2 pour le point de charge  $P_1$  (respectivement  $P_2$ ). On pose :

$$r^i = \frac{\sigma_0^i (d_3^1 e^1 + d_3^2 e^2)}{\sqrt{3} d_3^i (e^1 + e^2) \Sigma_{12}^0} \quad (III.88)$$

Comme pour l'approche à déformation imposée, les valeurs numériques données dans le tableau (III.1) permettent de conclure que le coefficient  $r^2$  est l'unique coefficient satisfaisant toutes les conditions. Que l'on travaille à déformation ( $2E_{12}$ ) ou à contrainte ( $\Sigma_{12}$ ) imposée, la couche 2 est donc toujours la couche limitante vis-à-vis de l'élasticité. On a finalement pour l'approche contrainte :

$$\alpha^E = \frac{\sigma_0^2 (d_3^1 e^1 + d_3^2 e^2)}{\sqrt{3} d_3^2 (e^1 + e^2) \Sigma_{12}^0} \quad (III.89)$$

### III.6.3.b Problème d'analyse limite : détermination de $\alpha^{AL}$

Les deux différences majeures entre le problème d'analyse limite et le problème d'élasticité sont résumées ici :

- en analyse limite, le chargement ne varie pas entre des bornes données mais est fixé à la valeur maximale que peut atteindre  $\Sigma_{12}$  en variant dans  $\mathcal{D}$ . Il suffit donc de vérifier le critère de VON-MISES, pour chaque couche, à l'unique point de charge  $P_1$ , défini par :

$$P_1 = \mu^+ \Sigma_{12}^0 = \Sigma_{12}^0 \quad (III.90)$$

- l'analyse limite relevant de la plasticité, il est nécessaire de prendre en compte les contraintes résiduelles, et en particulier la condition (III.84).

Le problème de maximisation  $P^{max,AL}$  perd donc, par rapport au problème  $P^{max,E}$ , les deux conditions liées au point de charge  $\mu^- \Sigma_{12}^0$  et en gagne une, l'équation (III.91c), liée à la condition de moyenne sur les contraintes résiduelles.  $P^{max,AL}$  s'énonce comme suit :

$P^{max,AL}$  : Trouver  $\alpha^{AL}$  tel que :  $\alpha^{AL} = \max_{\rho_{12}^i, \alpha}(\alpha)$  où  $(\rho_{12}^i, \alpha)$  satisfont :

$$\alpha > 0 \quad (III.91a)$$

$$-\frac{\sigma_0^i}{\sqrt{3}} \leq d_3^i \frac{e^1 + e^2}{e^1 d_3^1 + e^2 d_3^2} \Sigma_{12}^0 \alpha + \rho_{12}^i \leq \frac{\sigma_0^i}{\sqrt{3}} \quad i = 1, 2 \quad (III.91b)$$

$$e^1 \rho_{12}^1 + e^2 \rho_{12}^2 = 0 \quad (III.91c)$$

où les équations (III.91b) correspondent au critère de VON-MISES exprimé dans chacune des deux couches pour l'unique point de charge  $P_1$ . En injectant (III.91c) dans (III.91b), on obtient un système de deux doubles inégalités à deux inconnues :  $\rho_{12}^2$  et  $\alpha$ . Le problème revient donc à trouver le maximum des coefficients  $\alpha$ , tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha > 0 \\ -\frac{\sigma_0^1 e^1}{\sqrt{3} e^2} \leq d_3^1 \frac{e^1 + e^2}{e^1 d_3^1 + e^2 d_3^2} \Sigma_{12}^0 \frac{e^1}{e^2} \alpha - \rho_{12}^2 \leq \frac{\sigma_0^1 e^1}{\sqrt{3} e^2} \\ -\frac{\sigma_0^2}{\sqrt{3}} \leq d_3^2 \frac{e^1 + e^2}{e^1 d_3^1 + e^2 d_3^2} \Sigma_{12}^0 \alpha + \rho_{12}^2 \leq \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{3}} \end{array} \right. \quad (III.92)$$

Ce système est résolu graphiquement figure III.12 : l'ensemble des solutions admissibles est

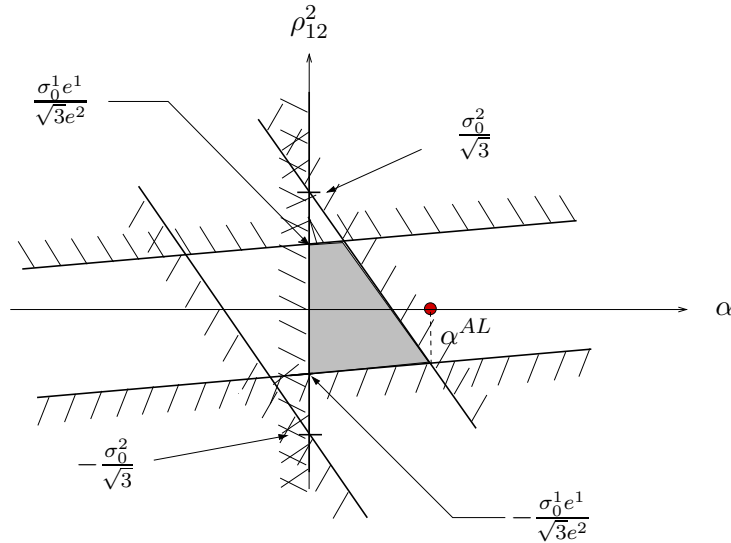


FIGURE III.12 – Solution du problème d'analyse limite à contrainte imposée

représenté par le polygône grisé. Après calcul, le coefficient de charge maximum appartenant à ce polygône est donné par :

$$\alpha^{AL} = \frac{e^1 \sigma_0^1 + e^2 \sigma_0^2}{\sqrt{3} (e^1 + e^2) \Sigma_{12}^0} \quad (III.93)$$

**III.6.3.c Problème d'adaptation : détermination de  $\alpha^{AD}$** 

Travailler à contrainte imposée permet également de mettre en lumière le fait que l'adaptation soit vue comme une généralisation de l'analyse limite. En effet, pour traiter un problème d'adaptation à contrainte imposée, il faut prendre en compte, comme en analyse limite, les contraintes résiduelles, et il faut considérer, comme en élasticité, les deux points de charge  $P_1$  et  $P_2$ , afin de rendre compte de l'aspect variable du chargement. Le problème  $P^{max,AD}$  correspondant devient alors :

$P^{max,AD}$  : Trouver  $\alpha^{AD}$  tel que :  $\alpha^{AD} = \max_{\rho_{12}, \alpha}(\alpha)$  où  $(\rho_{12}, \alpha)$  satisfait :

$$\alpha > 0 \quad (III.94a)$$

$$-\frac{\sigma_0^i}{\sqrt{3}} \leq \rho_{12}^i \leq \frac{\sigma_0^i}{\sqrt{3}} \quad i = 1, 2 \quad (III.94b)$$

$$-\frac{\sigma_0^i}{\sqrt{3}} \leq \frac{e^1 + e^2}{e^1 d_3^1 + e^2 d_3^2} \Sigma_{12}^0 \alpha + \rho_{12}^i \leq \frac{\sigma_0^i}{\sqrt{3}} \quad i = 1, 2 \quad (III.94c)$$

$$e^1 \rho_{12}^1 + e^2 \rho_{12}^2 = 0 \quad (III.94d)$$

Les inégalités (III.94b) (respectivement (III.94c)) correspondent alors au critère de VON-MISES exprimé au point de charge  $P_1$  (respectivement  $P_2$ ) défini par (III.85). En exprimant, comme précédemment,  $\rho_{12}^1$  en fonction de  $\rho_{12}^2$ , on ramène ce problème à la recherche du coefficient de charge maximal vérifiant les quatre doubles inégalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha > 0 \\ -\frac{\sigma_0^1 e^1}{\sqrt{3} e^2} \leq \rho_{12}^2 \leq \frac{\sigma_0^1 e^1}{\sqrt{3} e^2} \\ -\frac{\sigma_0^2}{\sqrt{3}} \leq \rho_{12}^2 \leq \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sigma_0^1 e^1}{\sqrt{3} e^2} \leq d_3^1 \frac{e^1 + e^2}{e^1 d_3^1 + e^2 d_3^2} \frac{e^1}{e^2} \Sigma_{12}^0 \alpha - \rho_{12}^2 \leq \frac{\sigma_0^1 e^1}{\sqrt{3} e^2} \\ -\frac{\sigma_0^2}{\sqrt{3}} \leq d_3^2 \frac{e^1 + e^2}{e^1 d_3^1 + e^2 d_3^2} \Sigma_{12}^0 \alpha + \rho_{12}^2 \leq \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{3}} \end{array} \right. \quad (III.95)$$

La résolution graphique est représentée figure III.13, de laquelle on déduit la valeur du coefficient de charge à l'adaptation, que l'on trouve, dans ce cas, égale à la valeur du coefficient de charge limite.

$$\alpha^{AD} = \frac{e^1 \sigma_0^1 + e^2 \sigma_0^2}{\sqrt{3} (e^1 + e^2) \Sigma_{12}^0} = \alpha^{AL} \quad (III.96)$$

Notons également que ces résultats permettent de corroborer les relations d'ordre intuitives, suite aux descriptions des différents types de réponses (paragraphe II.2), entre les différents coefficients de charge :

$$\alpha^E \leq \alpha^{AD} \leq \alpha^{AL} \quad (III.97)$$



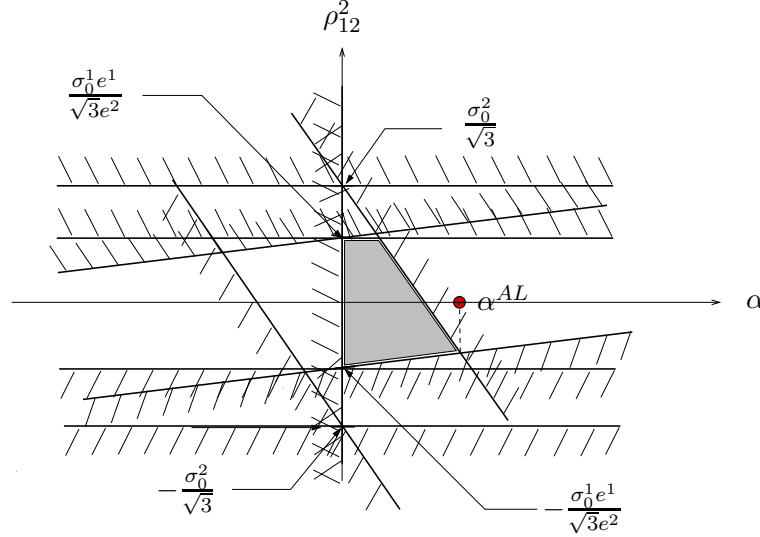


FIGURE III.13 – Solution du problème d'adaptation à contrainte imposée

### III.6.4 Approche cinématique pour une sollicitation en cisaillement pur

Les calculs suivants ont une nouvelle fois pour objectif de valider les résultats obtenus par l'approche statique des couplages entre homogénéisation et analyse limite et entre homogénéisation et adaptation, en étudiant l'approche cinématique. L'étude des chargements limites peut être, de par sa simplicité, résolue entièrement analytiquement. L'étude sous chargements variables nécessite quant-à-elle une résolution numérique.

#### III.6.4.a Détermination analytique du coefficient de charge limite

La notion de cycle de chargements, inhérente à la méthode cinématique, n'ayant pas de sens en analyse limite, le théorème couplé est en fait exprimé en termes de puissance et non plus en termes d'énergie, ce qui est équivalent à ne considérer que l'unique point de charge  $P_1$  défini par (III.90). La fonctionnelle  $\hat{W}$  à minimiser devient donc la puissance dissipée plastiquement par la cellule pour le chargement attaché au point de charge  $P_1$  :

$$\hat{W}(\sigma_0^i, \dot{\varepsilon}^{p^i}) = \sum_{i=1}^2 e^i \sigma_0^i \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}^{p^i}(P_1) : \dot{\varepsilon}^{p^i}(P_1)} \quad (\text{III.98})$$

De même, la condition de compatibilité du taux de déformations plastiques, toujours supposé de la forme (III.61), se réduit à :

$$2\dot{\varepsilon}_{12}^{p^i}(P_1) = \left( \frac{\partial u_1^{pér}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{pér}}{\partial x_1} \right) + 2E_{12} \quad \forall i = 1, 2 \quad (\text{III.99})$$

Dans cette équation, la partie  $\mathbf{grad}_s \mathbf{u}^{pér}$  est nulle puisque le déplacement périodique ne dépend, par analogie avec l'approche à déformation imposée, que de la variable  $x_3$ . Par contre, il faut noter ici une nouvelle particularité de l'approche actuelle, à savoir que le chargement à contrainte

imposée implique de laisser libres les déformations macroscopiques qui leur sont associées. On a donc

$$2E_{12} \neq 0 \quad (\text{III.100})$$

Enfin, l'égalité concernant le travail des contraintes purement élastiques dans le champ du taux de déformations plastiques devient également une égalité en puissance exprimée à l'unique point de charge  $P_1$  :

$$\sum_{i=1}^2 e^i \sigma_{12}^{(e)i}(P_1) 2\dot{\varepsilon}_{12}^{p_i}(P_1) = 1 \quad \forall i = 1, 2 \quad (\text{III.101})$$

Le problème de minimisation correspondant s'écrit alors :

$P^{min,AL}$  : Trouver  $\alpha^{AL}$  tel que :  $\alpha^{AL} = \min_{\dot{\varepsilon}_{12}^{p_i}, E_{12}} \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ e^1 \sigma_0^1 |\dot{\varepsilon}_{12}^{p_1}(P_1)| + e^2 \sigma_0^2 |\dot{\varepsilon}_{12}^{p_2}(P_1)| \right]$  où  $\dot{\varepsilon}_{12}^{p_i}$  et  $E_{12}$  satisfont :

$$2\dot{\varepsilon}_{12}^{p_1}(P_1) = 2\dot{\varepsilon}_{12}^{p_2}(P_1) = 2E_{12} \quad \forall i = 1, 2 \quad (\text{III.102a})$$

$$e^1 \sigma_{12}^{(e)1}(P_1) 2\dot{\varepsilon}_{12}^{p_1}(P_1) + e^2 \sigma_{12}^{(e)2}(P_1) 2\dot{\varepsilon}_{12}^{p_2}(P_1) = 1 \quad (\text{III.102b})$$

En injectant (III.102a) dans la fonction objectif, cette dernière devient alors uniquement fonction de  $2E_{12}$ , que l'on exprime en fonction des données du problème grâce à (III.102b). On obtient finalement en remplaçant les champs de contraintes purement élastiques par leur expression (III.82) dans chacune des deux couches :

$$\alpha^{AL} = \frac{e^1 \sigma_0^1 + e^2 \sigma_0^2}{\sqrt{3} (e^1 + e^2) \Sigma_{12}^0} \quad (\text{III.103})$$

Par comparaison avec (III.93), on constate que les deux approches, statique et cinématique, conduisent bien au même coefficient de charge limite.

### III.6.4.b Détermination du coefficient de charge à l'adaptation

La même étude est ensuite réalisée pour le problème d'adaptation  $P^{min,AD}$ , dual de  $P^{max,AD}$ . Contrairement à l'analyse limite, on considère ici des cycles de chargements compatibles, décrits par les deux points de charge  $P_1$  et  $P_2$  définis par (III.85), ce qui revient à résoudre la minimisation suivante :

$P^{min,AD}$  : Trouver  $\alpha^{AD}$  tel que :

$$\alpha^{AD} = \min_{\dot{\varepsilon}_{12}^{p_i}(P_j)} \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0^1 e^1 \left[ |\dot{\varepsilon}_{12}^{p_1}(P_1)| + |\dot{\varepsilon}_{12}^{p_1}(P_2)| \right] + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0^2 e^2 \left[ |\dot{\varepsilon}_{12}^{p_2}(P_1)| + |\dot{\varepsilon}_{12}^{p_2}(P_2)| \right]$$

où les  $\dot{\varepsilon}_{12}^{p_i}(P_j)$ ,  $i = 1, 2$  et  $j = 1..2^n$  satisfont :

$$2\dot{\varepsilon}_{12}^{p_i}(P_1) + 2\dot{\varepsilon}_{12}^{p_i}(P_2) = 2E_{12} \quad i = 1, 2 \quad (\text{III.104a})$$

$$e^1 \sigma_{12}^{(e)1}(P_2) 2\dot{\varepsilon}_{12}^{p_1}(P_2) + e^2 \sigma_{12}^{(e)2}(P_2) 2\dot{\varepsilon}_{12}^{p_2}(P_2) = 1 \quad (\text{III.104b})$$

En combinant les conditions d'optimisation entre elles, la fonction objectif peut être ramenée à une fonction de deux variables, par exemple  $E_{12}$  et  $\varepsilon_{12}^{p^2}(P_2)$  :

$$\alpha^{AD} = \min_{E_{12}, \varepsilon_{12}^{p^2}(P_2)} \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0^1 e^1 \left[ \left| E_{12} - \frac{1}{2e^1 \sigma_{12}^{(e)1}(P_2)} + \frac{e^2 d_3^2}{e^1 d_3^1} \varepsilon_{12}^{p^2}(P_2) \right| + \left| \frac{1}{2e^1 \sigma_{12}^{(e)1}(P_2)} - \frac{e^2 d_3^2}{e^1 d_3^1} \varepsilon_{12}^{p^2}(P_2) \right| \right] + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0^2 e^2 \left[ \left| E_{12} - \varepsilon_{12}^{p^2}(P_2) \right| + \left| \varepsilon_{12}^{p^2}(P_2) \right| \right] \quad (\text{III.105})$$

La minimisation de cette fonctionnelle nécessitant un traitement numérique, nous ne pouvons présenter de résolution analytique de  $P^{min,AD}$ . Cependant, le traitement numérique effectué fournit une valeur pour  $\alpha^{AD}$  correspondant à la valeur trouvée pour l'application numérique du coefficient de charge à l'adaptation (III.96) obtenu par l'approche statique. On en déduit donc que :

$$\alpha^{AD} = \alpha^{AL} \quad (\text{III.106})$$

ce qui était également le cas par l'approche statique.

### III.7 Bilan du chapitre

Le premier objectif de ce troisième chapitre était de justifier l'intérêt de notre étude, au travers de quelques éléments bibliographiques mettant en lumière la nécessité d'un couplage tel celui de l'adaptation et de l'homogénéisation périodique. En ce sens, le premier paragraphe nous a permis de motiver nos travaux, qui se proposent d'étudier numériquement la résistance de matériaux à microstructure tridimensionnelle soumise à des chargements variables et bornés.

Dans cette optique ont été présentées, dans un deuxième paragraphe, les spécificités de notre étude à l'adaptation, à savoir :

- la nature inhabituelle des chargements, imposés sous la forme de déformations ou contraintes macroscopiques,
- les deux types de cellules de base considérés : la cellule de base réelle, représentant autant que possible la microstructure du matériau étudié, et la cellule de base de référence au comportement purement élastique.

Les ingrédients nécessaires à la mise en œuvre desdits couplages ayant été présentés, les théorèmes couplés ont ensuite été énoncés, d'abord d'un point de vue statique en se basant sur le théorème de MELAN, puis d'un point de vue cinématique en se basant sur le théorème de KOITER. Les théorèmes ont été abordés pour chacun des trois types de matériaux présentés aux paragraphes I.3.4, I.3.5 et I.3.6 : les matériaux à microstructure tridimensionnelle périodique sans trou ni fissure, les structures fines à cavités périodiques et les matériaux de types plaques périodiques.

Afin d'illustrer les différents couplages et surtout afin d'en présenter les méthodes de résolution de manière à introduire les méthodes numériques du chapitre suivant, le cinquième paragraphe s'attache à déterminer les coefficients de charge d'un matériau stratifié aux propriétés telles que des résolutions analytiques sont possibles. L'étude est menée essentiellement vis-à-vis de l'adaptation à déformation imposée, mais également vis-à-vis de deux autres types de réponses présentés au chapitre I : l'élasticité et la rupture instantanée. L'intérêt d'étudier également ces deux types de réponses repose sur la nécessité d'établir des relations d'ordre entre les différents coefficients de charge, afin de mettre en lumière l'utilité de la théorie de l'adaptation.

En vue de valider les résultats précédents, d'illustrer l'approche contrainte présentée au chapitre I, mais également d'identifier les différences entre une approche déformation et une approche contrainte, le dernier paragraphe étudie exactement les mêmes cas que précédemment, mais à contrainte imposée. Ceci nous permet de relever ces quelques remarques :

- l'étude de la rupture instantanée n'a pas de sens à déformation imposée puisque la théorie des charges limites ne concerne que les systèmes soumis à des sollicitations de type forces (c'est-à-dire, dans nos couplages, de type contraintes),
- les relations de moyenne sur les contraintes résiduelles sont à traiter avec précaution. En effet, à déformation macroscopique imposée, la moyenne des contraintes résiduelles n'a aucune raison de s'annuler alors qu'elle le doit à contrainte macroscopique imposée.

Ces remarques seront à prendre en compte rigoureusement dans l'implémentation des méthodes au chapitre IV.



## CHAPITRE IV

# Mise en œuvre numérique des couplages

---

**C**e chapitre est consacré à la mise en œuvre numérique des couplages présentés jusqu'à présent, tant au point de vue de l'élasticité, de l'adaptation ou de l'analyse limite. Comme l'a permis de mettre en lumière l'exemple analytique du stratifié soumis à des chargements unidimensionnels, deux types de discrétisations sont nécessaires à l'implémentation de ces couplages : une discrétisation temporelle, traduisant l'aspect variable des chargements macroscopiques, et une discrétisation spatiale, plus classique, basée sur la méthode des éléments finis en déplacements. C'est en ce sens que le premier paragraphe présente la façon de discrétiser temporellement ces couplages, au travers d'une décomposition du domaine de chargements en points de charge, selon la méthode présentée au chapitre précédent. Concernant la discrétisation spatiale, le second paragraphe rappelle quelques notations et définitions utilisées par la suite, inhérentes à la méthode des éléments finis en déplacements. On s'intéresse ensuite à la discrétisation des problèmes cellulaires purement élastiques et des problèmes aux contraintes résiduelles, dans le cas de matériaux possédant une cellule de base dite classique. Pour ce faire, on introduit une formulation spécifique prenant rigoureusement en compte les relations de périodicité et de moyenne. On aborde également les problèmes plus techniques liés à la mise en œuvre des relations de périodicité et au stockage optimisé des données. Enfin, on décrit, avant de résumer les principes de détermination des coefficients de charge, les problèmes d'optimisation discrétisés, tant d'un point de vue statique que cinématique.

---

## PLAN DU CHAPITRE IV

---

<b>IV.1</b>	<b>Discrétisation des domaines de chargements</b>	<b>127</b>
<b>IV.2</b>	<b>MEF en déplacements et notations associées</b>	<b>128</b>
IV.2.1	Discrétisation par éléments finis	128
IV.2.1.a	Discrétisation des variables périodiques	128
IV.2.1.b	Discrétisation des champs totaux microscopiques	130
IV.2.2	Intégration numérique	132
<b>IV.3</b>	<b>Discrétisation du problème cellulaire élastique</b>	<b>132</b>
IV.3.1	Formulation variationnelle spécifique	133
IV.3.2	Technique du noeud macroscopique	136
IV.3.3	Problème purement élastique discrétisé	137
IV.3.4	Prise en compte des relations de périodicité sur les déplacements	138
<b>IV.4</b>	<b>Discrétisation du problème aux contraintes résiduelles</b>	<b>140</b>
IV.4.1	Formulation variationnelle spécifique	140
IV.4.2	Problème discrétisé et matrice d'équilibre	140
IV.4.3	Prise en compte des relations de périodicité sur les déplacements virtuels	142
IV.4.4	Distinction déformation/contrainte imposée	142
IV.4.5	Stockage optimisé de la matrice d'équilibre	143
<b>IV.5</b>	<b>Problèmes d'optimisation discrétisés</b>	<b>143</b>
IV.5.1	Discrétisation de l'approche statique	144
IV.5.2	Discrétisation de l'approche cinématique	145
IV.5.3	Obtention des domaines de résistances macroscopiques	146
<b>IV.6</b>	<b>Récapitulatif d'un calcul de résistance à l'élasticité, à l'adaptation et à l'analyse limite</b>	<b>147</b>
<b>IV.7</b>	<b>Bilan du chapitre</b>	<b>149</b>

---

## IV.1 Discrétisation des domaines de chargements

Comme précisé au chapitre précédent par l'équation (III.8), le domaine  $\mathcal{D}$  regroupe l'ensemble des chargements, en termes de déformations ou contraintes macroscopiques, qui sont susceptibles d'agir sur la cellule de base. L'objectif est ici de discrétiser ce domaine en se basant sur la méthode présentée au paragraphe III.5.3. En vertu du théorème de KÖNIG et KLEIBER (1978), il n'est effectivement pas nécessaire de considérer tous les chargements inclus dans ce domaine pour rechercher le domaine final d'adaptation. En effet, du fait de la convexité de  $\mathcal{D}$  et de la surface seuil de plasticité définie par (III.1), une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait adaptation pour tous les chargements du domaine  $\mathcal{D}$ , est qu'il y ait adaptation pour tout trajet de chargements passant par les sommets de ce domaine. Les chargements discrets inclus dans l'ensemble  $\mathfrak{D}$  défini par (IV.1) :

$$\mathfrak{D} = \left\{ P_j \mid P_j = \sum_{i=1}^n \mu_i \mathcal{P}_i^0, \quad \mu_i = \mu_i^- \text{ ou } \mu_i^+, \quad j = 1..2^m \right\} \quad (\text{IV.1})$$

satisfont cette condition puisque ce sont exactement les sommets du polyèdre  $\mathcal{D}$ . Par extension du théorème de KÖNIG et KLEIBER au cas de l'élasticité, on considère le même domaine discrétisé pour la recherche des coefficients de charge élastiques. On rappelle enfin que l'analyse limite est caractérisée par un chargement proportionnel représenté par un unique point de charge  $P_1$ , et ce, quelle que soit la dimension  $n$  de l'espace des charges considéré. Suivant le type d'analyse, les conditions d'optimisation doivent donc être vérifiées aux points de charge définis sur la figure IV.1 dans le cas où l'on impose deux chargements indépendants. On rappelle que

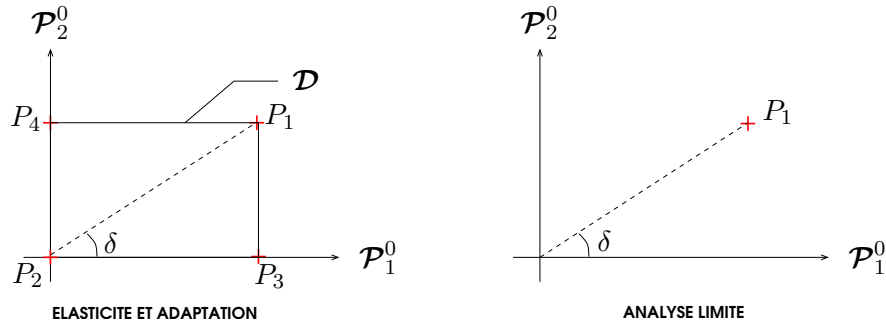


FIGURE IV.1 – Définition des points de charge pour l'élasticité, l'adaptation et l'analyse limite

les  $n$  chargements  $\mathcal{P}_i^0$  représentent soit des vecteurs de déformations macroscopiques, soit des vecteurs de contraintes macroscopiques. Les points de charge sont donc au nombre de  $2^m$ , avec  $m = n$  lorsque l'on recherche les coefficients de charge vis-à-vis de l'élasticité ou de l'adaptation, et  $m = 0$  lorsque l'on recherche les coefficients de charge vis-à-vis de l'analyse limite.

L'aspect variable des chargements traduisant leur dépendance temporelle, l'ensemble  $\mathfrak{D}$  représente en ce sens une discrétisation temporelle du domaine  $\mathcal{D}$ . Par conséquent, toute somme continue devient une somme discrète définie par (IV.2) pour tout temps  $T > 0$  et pour toute



fonction  $f : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t)$ :

$$\int_0^T f(t) dt = \sum_{j=1}^{2^m} f(P_j) \quad (\text{IV.2})$$

La discrétisation temporelle étant définie, intéressons nous désormais à la discrétisation spatiale sur la cellule de base, en prenant en compte le fait que les variables intervenant dans les problèmes couplés dépendent à la fois du temps et de l'espace.

## IV.2 MEF en déplacements et notations associées

Pour ce faire, on rappelle dans ce deuxième paragraphe, quelques notations de la méthode des éléments finis en déplacements (MEF) dont on trouve une description détaillée dans DHATT et TOUZOT (1984). C'est en effet cette méthode qui sera utilisée pour implémenter nos couplages, c'est-à-dire pour résoudre numériquement les problèmes locaux purement élastiques et aux contraintes résiduelles. Ces notations et définitions sont celles de la MEF classique, en ayant à l'esprit que les variables dépendent également du temps, par l'intermédiaire des différents points de charge.

### IV.2.1 Discrétisation par éléments finis

La cinématique particulière, inhérente au choix de travailler avec l'homogénéisation périodique, implique une discrétisation toute aussi particulière. En effet, la décomposition (I.40) du déplacement total en une partie périodique et une partie macroscopiquement homogène, que l'on résume comme suit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^{per}(\mathbf{x}, t) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{E} & \text{si l'on travaille à } \mathbf{E} \text{ imposée,} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_V & \text{si l'on travaille à } \boldsymbol{\Sigma} \text{ imposée.} \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

implique que les problèmes cellulaires ont comme inconnue principale la partie périodique de  $\mathbf{u}$ , qui est alors discrétisée classiquement, comme l'expose le paragraphe IV.2.1.a. Reste ensuite, afin de reconstituer le déplacement total, à ajouter la contribution du déplacement macroscopique, ce qui est présenté au paragraphe IV.2.1.b. Afin de ramener les couplages continus à des couplages discrets, on suppose avant toute chose que la cellule de base est discrétisée en  $NELT$  éléments isoparamétriques. Dans la pratique, l'élément courant, noté  $e$ , sera essentiellement un hexaèdre à 20 noeuds, élément quadratique noté H20.

#### IV.2.1.a Discrétisation des variables périodiques

Concernant la partie périodique des problèmes posés sur la cellule de base, les inconnues élémentaires sont les degrés de liberté des noeuds d'interpolation de l'élément  $e$ , que sont les déplacements périodiques nodaux notés  $\mathbf{u}^{per,k}$ , où l'indice  $k$  indique le numéro du noeud de l'élément courant  $e$  qui en possède  $NNOE$ . Le déplacement périodique sur l'élément courant est

alors discrétisé par l'intermédiaire de ces déplacements nodaux et de  $NNOE$  fonctions de forme<sup>1</sup>  $N^k$ , tels que<sup>2</sup>:

$$\mathbf{u}^{pér,e}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{NNOE} N^k(\mathbf{x}) \mathbf{u}^{pér,k} \quad (\text{IV.4})$$

où  $\mathbf{x}$  varie dans l'élément  $e$ . En adoptant les conventions suivantes, usuelles aux méthodes éléments finis :

- tout vecteur colonne des problèmes discrétisés est noté entre accolades :  $\{\dots\}$ ,
- tout vecteur ligne des problèmes discrétisés est noté entre crochets :  $\langle \dots \rangle$ ,
- toute matrice des problèmes discrétisés est notée entre crochets :  $[\dots]$ ,

et en définissant, par (IV.5), la matrice  $\mathbf{N}$  appelée matrice des fonctions de forme au point  $\mathbf{x}$ :

$$[\mathbf{N}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} N^1(\mathbf{x}) & 0 & 0 & \dots & N^{NNOE}(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & N^1(\mathbf{x}) & 0 & \dots & 0 & N^{NNOE}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & N^1(\mathbf{x}) & \dots & 0 & 0 & N^{NNOE}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

la définition (IV.4) s'écrit :

$$\{\mathbf{u}^{pér,e}(\mathbf{x})\} = [\mathbf{N}(\mathbf{x})] \{\mathbf{u}^{pér,e}\} \quad (\text{IV.6})$$

où le vecteur  $\{\mathbf{u}^{pér,e}\}$  est constitué de l'ensemble des vecteurs degrés de liberté élémentaires selon (IV.7) :

$$\{\mathbf{u}^{pér,e}\} = \{\mathbf{u}^{pér,k}\}_{k=1..NNOE} = \langle \mathbf{u}^{pér,1}, \mathbf{u}^{pér,2}, \dots, \mathbf{u}^{pér,NNOE} \rangle^T \quad (\text{IV.7})$$

En se basant sur les résultats du paragraphe II.1.2.c, on conclut que l'hypothèse des petites transformations permet de définir le champ des déformations périodiques à partir du champ des déplacements périodiques. D'après (II.3), le champ de déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pér}(\mathbf{x})$  se discrétise donc en un vecteur de déformations élémentaires  $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{pér,e}(\mathbf{x})\}$ , tel que :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^{pér,e}(\mathbf{x})\} = [\mathbf{B}^e(\mathbf{x})] \{\mathbf{u}^{pér,e}\} \quad (\text{IV.8})$$

où la matrice  $[\mathbf{B}^e(\mathbf{x})]$  est la matrice composée des dérivées des fonctions de forme au point  $\mathbf{x}$ , selon la définition suivante :

$$[\mathbf{B}^e(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N^{NNOE}(\mathbf{x})}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N^{NNOE}(\mathbf{x})}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N^1(\mathbf{x})}{\partial x_3} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N^{NNOE}(\mathbf{x})}{\partial x_3} \\ \frac{\partial N^1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial N^1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial N^{NNOE}(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial N^{NNOE}(\mathbf{x})}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^1(\mathbf{x})}{\partial x_3} & \frac{\partial N^1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & 0 & \frac{\partial N^{NNOE}(\mathbf{x})}{\partial x_3} & \frac{\partial N^{NNOE}(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N^1(\mathbf{x})}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N^1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N^{NNOE}(\mathbf{x})}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N^{NNOE}(\mathbf{x})}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

1. Les éléments étant isoparamétriques, ces fonctions interpolent à la fois la géométrie et le déplacement périodique.

2. Afin de ne pas surcharger l'exposé, on omet la dépendance temporelle éventuelle des variables.

### IV.2.1.b Discrétisation des champs totaux microscopiques

Après avoir discrétisé classiquement la partie périodique du déplacement, on lui adjoint sa partie macroscopique afin d'exprimer le déplacement total élémentaire et d'en déduire les déformations et contraintes purement élastiques correspondantes. On a :

$$\mathbf{u}^e(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^{pér,e}(\mathbf{x}) \quad (\text{IV.10})$$

Ce qui implique, d'après (IV.8), que la déformation totale élémentaire s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pér,e}(\mathbf{x}) \quad (\text{IV.11})$$

Soit en passant aux notations éléments finis :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x})\} = \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\} + [\mathbf{B}^e(\mathbf{x})] \{\mathbf{u}^{pér,e}\} \quad (\text{IV.12})$$

où le vecteur  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  est constitué des six composantes de la déformation macroscopique. On introduit alors la matrice  $[\mathbf{B}^{hom,e}(\mathbf{x})]$ , constituée par la concaténation de la matrice classique  $[\mathbf{B}^e(\mathbf{x})]$  et de la matrice identité  $6 \times 6$  notée  $[\mathbf{I}]$ , de telle sorte que la déformation élémentaire devient :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x})\} = [\mathbf{B}^{hom,e}(\mathbf{x})] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{pér,e} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.13})$$

avec :

$$[\mathbf{B}^{hom,e}(\mathbf{x})] = [[\mathbf{B}^e(\mathbf{x})], [\mathbf{I}]] \quad (\text{IV.14})$$

C'est là la principale spécificité d'une discrétisation issue de l'utilisation de l'homogénéisation périodique : la déformation totale s'exprime, comme dans tout problème classique, au travers d'une matrice constituée de dérivées des fonctions de forme, mais cette matrice est *augmentée* de la matrice identité, traduisant la partie homogène du déplacement total élémentaire.

#### REMARQUE IV.1

Cette redéfinition de la matrice des dérivées des fonctions de forme est valable quelque soit la cellule de base considérée, pourvu que le chargement soit du type contrainte ou déformation macroscopique imposée. Par contre, pour les problèmes posés en terme de chargements généralisés, la cinématique de plaque définie par la relation (IV.15) (BOURGEOIS, 1997) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^e(\mathbf{x})) = \mathbf{E} - x_3 \mathbf{K} + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{pér,e}(\mathbf{x})) \quad (\text{IV.15})$$

modifie quelque peu cette nouvelle matrice. On a en effet, en appliquant les mêmes principes de discrétisation que pour la cinématique classique :

$$[\mathbf{B}^{hom,e}(\mathbf{x})] = [[\mathbf{B}^e(\mathbf{x})], [\mathbf{I}_{x_3}]] \quad (\text{IV.16})$$

où la matrice  $[\mathbf{I}_{x_3}]$  est définie par<sup>3</sup> :

$$[\mathbf{I}_{x_3}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

□

Enfin, dans le cadre de l'élasticité linéaire, on exprime le vecteur des contraintes élémentaires grâce à la loi de comportement (II.8) de HOOKE. On a alors<sup>4</sup> :

$$\{\boldsymbol{\sigma}^{(e),e}(\mathbf{x})\} = [\mathbf{d}^e] [\mathbf{B}^{hom,e}(\mathbf{x})] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{pér,e} \\ \bar{\varepsilon} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.18})$$

Dans cette expression,  $[\mathbf{d}^e]$  est le tenseur d'élasticité attaché aux propriétés matérielles de l'élément  $e$ , défini, dans le cas de matériaux isotropes, par l'intermédiaire de deux paramètres indépendants : le module de YOUNG  $E^Y$  et le coefficient de POISSON  $\nu$ , tels que :

$$[\mathbf{d}^e] = \begin{bmatrix} d_1^e & d_2^e & d_2^e & 0 & 0 & 0 \\ d_2^e & d_1^e & d_2^e & 0 & 0 & 0 \\ d_2^e & d_2^e & d_1^e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_3^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_3^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3^e \end{bmatrix} \quad (\text{IV.19})$$

où les coefficients matériaux  $d_1^e$ ,  $d_2^e$  et  $d_3^e$  sont définis comme suit :

$$d_1^e = \frac{E^Y(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, d_2^e = \frac{E^Y\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ et } d_3^e = \frac{E^Y}{2(1+\nu)} \quad (\text{IV.20})$$

Les fonctions de forme restent cependant d'autant plus difficiles à spécifier que l'élément courant  $e$  est complexe. La technique classique consiste alors à résoudre les problèmes, non pas sur l'élément réel  $e$ , mais sur l'élément de référence  $r$ , beaucoup moins complexe, qui lui est associé par l'intermédiaire de la transformation bijective  $\tau$ , définie par (IV.21), définissant les coordonnées  $\mathbf{x}$  des points de l'élément réel  $e$  à partir des coordonnées de  $\boldsymbol{\xi}$  des points correspondants de l'élément de référence  $r$ .

$$\tau : \boldsymbol{\xi} \mapsto \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) \quad (\text{IV.21})$$

3. Dans cette définition, l'altitude de référence  $x_3 = 0$  est l'altitude du feuillet moyen de la cellule de base.

4. On attire ici l'attention du lecteur sur la différence de notation entre l'indice supérieur  $^{(e)}$ , qui représente l'aspect *purement élastique* de la quantité à laquelle il est affublé, et l'indice supérieur  $^e$ , qui précise simplement que cette quantité est élémentaire.

Ceci permet alors d'exprimer plus simplement la matrice  $[\mathbf{B}^e(\mathbf{x})]$  selon la règle de dérivation (IV.22), permettant d'exprimer la dérivée de la  $i^{\text{ème}}$  fonction de forme  $N^i$  de l'élément  $e$  en fonction de la dérivée de la  $i^{\text{ème}}$  fonction de forme  $N^i$  de l'élément  $r$ .

$$\left\{ \frac{\partial N^i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\} = [\mathbf{J}_e(\boldsymbol{\xi})^{-1}] \left\{ \frac{\partial N^i(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right\} \quad (\text{IV.22})$$

où  $[\mathbf{J}_e]$  est la matrice jacobienne de la transformation  $\tau$ . Finalement, en vue de la manipulation d'intégrales, on utilise également cette transformation pour exprimer l'élément de volume  $dV$  dans le repère  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ :

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3 = \det[\mathbf{J}_e(\boldsymbol{\xi})] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (\text{IV.23})$$

Ce changement de variables permet alors de remplacer l'intégration d'une fonction<sup>5</sup>  $f$  sur  $e$  par son intégration sur  $r$ :

$$\int_e f(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_r f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})) \det[\mathbf{J}_e(\boldsymbol{\xi})] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (\text{IV.24})$$

### IV.2.2 Intégration numérique

Reste désormais à utiliser une méthode d'intégration numérique, afin de remplacer les intégrales de fonctions  $f$  supposées polynômiales, par des combinaisons linéaires des valeurs de ces fonctions en des points, appelés *points d'intégration*. En d'autres termes, le logiciel éléments finis que nous utiliserons transforme les sommes continues en sommes discrètes selon la formule de GAUSS (IV.25):

$$\int_{V^e} f(\mathbf{x}) dV = \sum_{i=1}^{NGE} \omega_i \det[\mathbf{J}_e(\boldsymbol{\xi}^i)] f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}^i)) \quad (\text{IV.25})$$

où :

- $NGE$  désigne le nombre de points de GAUSS de l'élément  $e$ ,
- $V^e$  désigne le volume occupé par l'élément  $e$ ,
- le vecteur  $\{\mathbf{x}^i\}$  contient les composantes du  $i^{\text{ème}}$  point de GAUSS de l'élément  $e$ ,
- le vecteur  $\{\boldsymbol{\xi}^i\}$  contient les composantes du  $i^{\text{ème}}$  point de GAUSS de l'élément  $r$ ,
- $\omega_i$  désigne le poids du  $i^{\text{ème}}$  point de GAUSS.

## IV.3 Discrétisation du problème cellulaire élastique

La discrétisation des problèmes cellulaires élastiques est nécessaire quelle que soit l'approche utilisée (statique ou cinématique). En effet, pour résoudre les problèmes d'optimisation, il faut, dans les deux cas, savoir exprimer en chaque point de charge et en chaque point de GAUSS, les contraintes purement élastiques qui prendraient naissance dans la cellule de base, du fait du

---

5. La fonction  $f$  peut représenter une fonction scalaire, une matrice, un vecteur, ou toute autre entité définie sur l'élément  $e$ .

chargement macroscopique imposé. Afin de ne pas alourdir la présentation, déjà suffisamment complexe du fait du formalisme éléments finis, on ne présente la méthode de discrétisation que sur des problèmes possédant une cellule de base  $V$  dite *classique*, c'est-à-dire les problèmes  $P_{déf}^{(e),cl}$  et  $P_{cont}^{(e),cl}$ . Cependant, ce choix n'est nullement réducteur. En effet,

- l'application de cette méthode au deuxième type de cellule de base, à savoir les cellules de base représentatives d'une structure fine à cavités, ne nécessite pas de modifications fondamentales de la méthode car les problèmes cellulaires présentés au paragraphe I.3.5.b ne diffèrent de ceux présentés au paragraphe I.3.4.c que par leurs conditions limites. Ces différences seront donc prises en compte numériquement en tant que conditions limites sans modifier l'approche générale proposée ci-après ;
- le troisième type de cellule de base, à savoir, les cellules de bases représentatives de structures de type plaques périodiques, implique quant-à-lui un changement au niveau du chargement et de la cinématique imposés. Cependant, la remarque IV.1 montre que le changement est pris en compte au niveau de l'expression de la matrice élémentaire des dérivées des fonctions de forme, ce qui, une fois de plus, n'affecte pas la méthodologie générale présentée ci-après.

### IV.3.1 Formulation variationnelle spécifique

Considérons, pour fixer les idées, le problème cellulaire élastique à déformation imposée,  $P_{déf}^{(e),cl}$ , représenté par le système d'équations (I.42). Afin d'implémenter les problèmes cellulaires à l'aide des outils de la MEF présentés précédemment, cette section a pour objectif d'écrire une formulation variationnelle de ces problèmes, qui prenne rigoureusement en compte les relations de périodicité sur la cellule de base, ainsi que les relations de moyenne entre les quantités microscopiques et leurs homologues macroscopiques. D'après le chapitre I, le problème local consiste à déterminer les champ  $\mathbf{u}^{pér,(e)}$  et  $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$ , tels que :

$$P_{déf}^{(e),cl} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{0} \text{ dans } V \\ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{d} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} (\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \rangle_V \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^{pér,(e)}) \text{ dans } V \\ \mathbf{u}^{pér,(e)} \text{ périodique sur } \partial V \\ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial V \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \rangle_V = \mathbf{E} \end{array} \right. \quad (\text{IV.26})$$

On se donne alors une cinématique virtuelle de type (I.40), cinématiquement admissible à zéro et définie par :

$$\delta \mathbf{u}^{(e)} = \delta \mathbf{u}^{pér,(e)} + \delta \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} \quad (\text{IV.27})$$

La formulation variationnelle est obtenue suite au raisonnement exposé ci-après, calqué sur le raisonnement classique en mécanique des solides déformables permettant de passer d'une formulation locale à une formulation globale. D'après l'équation d'équilibre (IV.26.a) et la cinématique virtuelle (IV.27), on obtient, en passant aux notations indicielles<sup>6</sup>, la formulation intégrale sui-

---

6. La convention de sommation utilisée est la convention d'EINSTEIN.

vante, pour tout triplet  $(i,j,k)$  variant dans  $(1,2,3)^3$  :

$$\int_V \left( \delta u_i^{pér,(e)} + \delta E_{ij} x_j \right) \sigma_{ik,k}^{(e)} dV = 0 \quad (\text{IV.28})$$

La formule de GREEN appliquée à l'égalité (IV.28) fournit alors :

$$- \int_V \delta u_{i,k}^{pér,(e)} \sigma_{ik}^{(e)} dV + \int_{\partial V} \delta u_i^{pér,(e)} \sigma_{ik}^{(e)} n_k dS + \delta E_{ij} \left[ - \int_V x_{j,k} \sigma_{ik}^{(e)} dV + \int_{\partial V} x_j \sigma_{ik}^{(e)} n_k dS \right] = 0 \quad (\text{IV.29})$$

où  $\mathbf{n}$  désigne la normale extérieure au contour  $\partial V$  de la cellule de base. Cette égalité peut être simplifiée par la prise en compte des relations de périodicité (IV.26.c) et (IV.26.d), de moyenne (IV.26.e) et d'équilibre (IV.26.a). En effet,

- la périodicité (repérée par le signe  $\#$ ) sur  $\partial V$  du déplacement  $\delta \mathbf{u}^{pér,(e)}$  associée à l'anti-périodicité (repérée par le signe  $-\#$ ) du vecteur  $\boldsymbol{\sigma}^{(e)} \cdot \mathbf{n}$  impliquent l'anti-périodicité sur le bord  $\partial V$  de l'intégrande  $\delta \mathbf{u}^{pér,(e)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \cdot \mathbf{n}$ , d'où :

$$\int_{\partial V} \underbrace{\delta u_i^{pér,(e)}}_{\#} \underbrace{\sigma_{ik}^{(e)} n_k}_{-\#} dS = 0 \quad (\text{IV.30})$$

- associées à la formule de GREEN et aux équations d'équilibre, les relations de moyenne sur la cellule de base impliquent, de par la définition même de l'opérateur moyenne (relation (I.27)), l'égalité suivante :

$$\int_{\partial V} x_j \sigma_{ik}^{(e)} n_k dS = \underbrace{\int_V x_{j,k} \sigma_{ik}^{(e)} dV}_{|V| \Sigma_{ij} \text{ (I.27)}} + \underbrace{\int_V x_j \sigma_{ik,k}^{(e)} dV}_{0 \text{ car } \sigma_{ik,k}^{(e)} = 0 \text{ (IV.26.a)}} \quad (\text{IV.31})$$

Grâce à ces observations, la relation (IV.29) devient dans un premier temps :

$$- \int_V \delta u_{i,k}^{pér,(e)} \sigma_{ik}^{(e)} dV - \delta E_{ij} \int_V \sigma_{ij}^{(e)} dV + \delta E_{ij} |V| \Sigma_{ij} = 0 \quad (\text{IV.32})$$

En prenant en compte le fait que la déformation macroscopique est considérée comme homogène sur la cellule de base, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de la variable microscopique  $\mathbf{x}$  (cf. (I.26)), la relation (IV.29) devient finalement :

$$\int_V \delta u_{i,k}^{pér,(e)} \sigma_{ik}^{(e)} dV + \int_V \delta E_{ij} \sigma_{ij}^{(e)} dV = |V| \delta E_{ij} \Sigma_{ij} \quad (\text{IV.33})$$

Le champ de déplacements périodiques  $\delta \mathbf{u}^{pér,(e)}$  étant relié au champ de déformations périodiques  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^{pér,(e)}$  par la relation (II.3), les tenseurs de déformations  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^{pér,(e)}$  et de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$  étant

symétriques, et les indices  $k$  et  $i$  étant muets, on a :

$$\begin{aligned}
 \delta u_{i,k}^{pér,(e)} \sigma_{ik}^{(e)} &= \frac{1}{2} \left( \delta u_{i,k}^{pér,(e)} \sigma_{ik}^{(e)} + \delta u_{i,k}^{pér,(e)} \sigma_{ik}^{(e)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \delta u_{i,k}^{pér,(e)} \sigma_{ik}^{(e)} + \delta u_{k,i}^{pér,(e)} \sigma_{ki}^{(e)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \delta u_{i,k}^{pér,(e)} \sigma_{ik}^{(e)} + \delta u_{k,i}^{pér,(e)} \sigma_{ik}^{(e)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \delta u_{i,k}^{pér,(e)} + \delta u_{k,i}^{pér,(e)} \right) \sigma_{ik}^{(e)} \\
 &= \delta \varepsilon_{ik}^{pér,(e)} \sigma_{ik}^{(e)}
 \end{aligned} \tag{IV.34}$$

Ce qui permet de réécrire (IV.33) de la façon suivante :

$$\int_V \left( \delta \varepsilon^{pér,(e)} + \delta \mathbf{E} \right) : \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV = |V| \delta \mathbf{E} : \boldsymbol{\Sigma} \tag{IV.35}$$

Reste désormais à prendre en compte la loi de comportement élastique (IV.26.b), dans laquelle on réinjecte la relation de moyenne (IV.26.e) :

$$\int_V \left( \delta \varepsilon^{pér,(e)} + \delta \mathbf{E} \right) : \mathbf{d} : \varepsilon^{(e)} (\mathbf{u}^{pér,(e)} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}) dV = |V| \delta \mathbf{E} : \boldsymbol{\Sigma} \tag{IV.36}$$

Ceci montre finalement que résoudre le système (IV.26) implique de déterminer le champ périodique  $\mathbf{u}^{pér,(e)}$ , tel que :

$$\boxed{
 \begin{cases}
 \forall \delta \mathbf{u}^{pér,(e)} \text{ périodique sur } \partial V \text{ tel que } \delta \varepsilon^{pér,(e)} = \mathbf{grad}_s \delta \mathbf{u}^{pér,(e)}, \\
 \forall \delta \mathbf{E} \text{ homogène sur } V, \\
 \int_V \left( \delta \varepsilon^{pér,(e)} + \delta \mathbf{E} \right) : \mathbf{d} : \left( \varepsilon^{pér,(e)} + \mathbf{E} \right) dV = |V| \delta \mathbf{E} : \boldsymbol{\Sigma}
 \end{cases}
 } \tag{IV.37}$$

L'implication réciproque se démontre en deux étapes :

- premièrement, en prenant  $\delta \mathbf{u}^{pér,(e)} = 0$  dans (IV.37), on a :

$$\forall \delta \mathbf{E}, \quad \int_V \delta \mathbf{E} : \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV = |V| \delta \mathbf{E} : \boldsymbol{\Sigma} \tag{IV.38}$$

ce qui permet de retrouver la relation de moyenne sur les contraintes :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV \tag{IV.39}$$

- deuxièmement, en prenant  $\delta \mathbf{E} = 0$ , on obtient après intégration par parties de (IV.37) :

$$\forall \delta \mathbf{u}^{pér,(e)}, \quad - \int_V \delta \mathbf{u}^{pér,(e)} : \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dV + \int_{\partial V} \mathbf{u}^{pér,(e)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{0} \tag{IV.40}$$

En choisissant alors le déplacement périodique virtuel nul sur le bord, on retrouve (IV.26.a).

Enfin, en choisissant  $\mathbf{u}^{pér,(e)}$  nul dans  $V$ , mais périodique sur  $\partial V$ , on montre l'anti-périodicité de  $\boldsymbol{\sigma}^{(e)} \cdot \mathbf{n}$  sur le bord, représentée par la relation (IV.26.d).

Ceci finit donc de montrer que les formulations locale (IV.26) et globale (IV.37) sont équivalentes.

La résolution de (IV.26) passe donc par la résolution de (IV.37) discrétisée.



### IV.3.2 Technique du noeud macroscopique

Une analyse de la formulation variationnelle (IV.37), issue des travaux de DÉBORDES (1976), s'avère cependant nécessaire pour être à même de traiter correctement la discrétisation des problèmes cellulaires. En effet, cette formulation met en lumière la réelle signification<sup>7</sup> des degrés de liberté associés au champ de déplacements sur la cellule de base. Ils sont en fait de deux natures :

- des degrés de liberté locaux,  $\mathbf{u}^{pér,(e)}$ , qui décrivent la fluctuation du champ de déplacements du fait des hétérogénéités de la cellule de base,
- des degrés de liberté globaux,  $\mathbf{E}$ , représentant le champ moyen sur la cellule de base, *id est* le champ de déformations qui apparaîtrait dans la cellule si elle ne présentait aucune hétérogénéité.

La formulation (IV.37) permet donc de considérer les composantes de la déformation macroscopique comme des degrés de liberté supplémentaires, venant s'ajouter aux composantes des déplacements périodiques nodaux, et dont les forces nodales associées sont les composantes de la contrainte macroscopique multipliées par le volume de la cellule de base.

#### REMARQUE IV.2

Les travaux de BOURGEOIS (1997) et DOMINICY-LENOBLE (1999) montrent que l'on arrive exactement à la même conclusion concernant les problèmes de type plaque, exprimés en terme de déformations et contraintes généralisées. Les degrés de liberté globaux sont, dans ce cas, les composantes du vecteur suivant :

$$\langle \mathbf{E}, \mathbf{K} \rangle = \langle E_{11}, E_{22}, 2E_{12}, K_{11}, K_{22}, 2K_{12} \rangle \quad (\text{IV.41})$$

et les forces nodales associées (divisées par l'aire  $|\bar{V}|$  du feuillet moyen de la cellule de base) deviennent :

$$\langle \mathbf{N}, \mathbf{M} \rangle = \langle N_{11}, N_{22}, N_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12} \rangle \quad (\text{IV.42})$$

Ces conclusions sont issues de la formulation variationnelle (IV.43), équivalente au problème local (I.54), s'écrivant, pour une cellule de base sans trou ni fissure :

$$\int_V \left( \delta \mathbf{E} - x_3 \delta \mathbf{K} + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{pér,(e)} \right) : \mathbf{d} : \left( \mathbf{E} - x_3 \mathbf{K} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pér,(e)} \right) dV = |\bar{V}| \delta \mathbf{E} : \mathbf{N} + |\bar{V}| \delta \mathbf{K} : \mathbf{M} \quad (\text{IV.43})$$

□

Pratiquement, une fois la cellule de base maillée, un noeud supplémentaire, dont les degrés de liberté sont les composantes de la déformation macroscopique, est ajouté à tous les éléments de la cellule de base, qui possèdent finalement  $NNOE+1$  noeuds chacun. Le vecteur des degrés de liberté élémentaires devient donc :

$$\{\mathbf{u}^e\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}^{pér,e} \\ \mathbf{E} \end{array} \right\} \quad (\text{IV.44})$$

---

7. Qui éclairera, par la même occasion, l'origine de l'expression (IV.13).

Ceci justifie donc, et aide en un sens à mieux appréhender, l'introduction de la matrice  $\mathbf{B}^{hom,e}$ , reliant déformations et degrés de liberté élémentaires, par :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x})\} = [\mathbf{B}^{hom,e}(\mathbf{x})] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{pér,e} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.45})$$

Numériquement, il devient alors aussi simple d'appliquer une déformation macroscopique et/ou une contrainte macroscopique, que d'appliquer un déplacement ou une force dans un code éléments finis classique.

### IV.3.3 Problème purement élastique discrétisé

On explicite désormais, compte-tenu des remarques précédentes, la discrétisation du problème local élastique. Pour ce faire, on écrit (IV.37) sous sa forme éléments finis : trouver le champ périodique  $\{\mathbf{u}^{pér,(e),e}\}$ , tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \{\delta \mathbf{u}^{pér,(e),e}\} \text{ périodique sur } \partial V, \quad \forall \{\delta \mathbf{E}\} \text{ homogène sur } V \\ \sum_{e=1}^{NELT} \int_{V^e} \langle \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{pér,(e),e} + \delta \mathbf{E} \rangle [\mathbf{d}^e] \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}^{pér,(e),e} + \mathbf{E} \right\} dV = |V| \langle \delta \mathbf{E} \rangle : \{\boldsymbol{\Sigma}\} \end{array} \right. \quad (\text{IV.46})$$

En introduisant la déformation totale élémentaire définie par (IV.13) et en explicitant uniquement la dépendance spatiale, la formulation devient :

$$\sum_{e=1}^{NELT} \int_{V^e} \langle \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(e),e}(\mathbf{x}) \rangle [\mathbf{d}^e] \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}^{(e),e}(\mathbf{x}) \right\} dV = |V| \langle \delta \mathbf{E} \rangle : \{\boldsymbol{\Sigma}\} \quad (\text{IV.47})$$

La relation (IV.45) appliquée à une déformation virtuelle, associée à l'intégration numérique définie par la relation (IV.25), donnent :

$$\sum_{e=1}^{NELT} \langle \delta \mathbf{u}^{pér,(e),e}, \delta \mathbf{E} \rangle [\mathbf{k}^{hom,e}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{pér,(e),e} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix} = |V| \langle \delta \mathbf{E} \rangle : \{\boldsymbol{\Sigma}\} \quad (\text{IV.48})$$

où la matrice de rigidité élémentaire  $[\mathbf{k}^{hom,e}]$  est définie par (IV.49) :

$$[\mathbf{k}^{hom,e}] = \sum_{i=1}^{NGE} \omega_i \det [J_e(\boldsymbol{\xi}^i)] [\mathbf{B}^{hom,e}(\mathbf{x}^i)]^T [\mathbf{d}^e] [\mathbf{B}^{hom,e}(\mathbf{x}^i)] \quad (\text{IV.49})$$

Après assemblage sur l'ensemble des  $NELT$  éléments de la cellule de base  $V$ , on est alors amené à résoudre le système linéaire classique<sup>8</sup> suivant :

$$[\mathbf{K}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{pér,(e)} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ |V|\boldsymbol{\Sigma} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.50})$$

Ce problème élastique cellulaire, dont les inconnues sont les déplacements périodiques discrétisés, est résolu, compte-tenu de la dépendance temporelle, pour chaque point de charge  $P_j$ , dans le logiciel éléments finis SIC (AUNAY, 1990) sur la base des travaux de MICHEL, qui a implémenté dans SIC l'utilisation de l'homogénéisation périodique dans le cadre de l'élasticité tridimensionnelle.

8. A la transformation de la matrice des dérivées des fonctions de forme près.

#### IV.3.4 Prise en compte des relations de périodicité sur les déplacements

Une des spécificités de ces développements repose justement sur la prise en compte numérique des conditions de périodicité sur les déplacements. Pratiquement, ces conditions se traduisent par des relations linéaires entre les degrés de liberté des noeuds qui se correspondent par périodicité. Par exemple, la figure IV.2 représente une cellule de base 3D, munie de trois vecteurs de

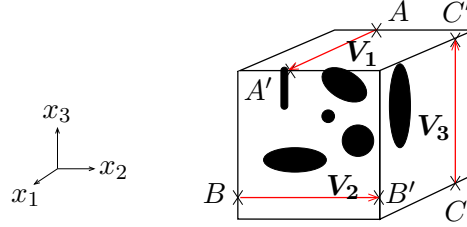


FIGURE IV.2 – Illustration des relations de périodicité sur les déplacements nodaux

périodicité  $\mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{V}_2$  et  $\mathbf{V}_3$ . Une fois cette cellule maillée, on se donne six noeuds se correspondant deux à deux, c'est-à-dire étant en vis-à-vis sur les trois paires de faces parallèles :

- les noeuds  $A$  et  $A'$ , de coordonnées respectives  $\mathbf{x}_A$  et  $\mathbf{x}_{A'}$ , sont images l'un de l'autre par la translation de vecteur  $\mathbf{V}_1$  :  $\mathbf{x}_{A'} = \mathbf{x}_A + \mathbf{V}_1$ ,
- les noeuds  $B$  et  $B'$ , de coordonnées respectives  $\mathbf{x}_B$  et  $\mathbf{x}_{B'}$ , sont images l'un de l'autre par la translation de vecteur  $\mathbf{V}_2$  :  $\mathbf{x}_{B'} = \mathbf{x}_B + \mathbf{V}_2$ ,
- les noeuds  $C$  et  $C'$ , de coordonnées respectives  $\mathbf{x}_C$  et  $\mathbf{x}_{C'}$ , sont images l'un de l'autre par la translation de vecteur  $\mathbf{V}_3$  :  $\mathbf{x}_{C'} = \mathbf{x}_C + \mathbf{V}_3$ .

Il est alors licite d'écrire les relations linéaires suivantes entre les déplacements nodaux (donc entre les degrés de liberté) qui se correspondent par périodicité :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{pér,A} - \mathbf{u}^{pér,A'} = 0 \\ \mathbf{u}^{pér,B} - \mathbf{u}^{pér,B'} = 0 \\ \mathbf{u}^{pér,C} - \mathbf{u}^{pér,C'} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.51})$$

La méthode implémentée dans SIC, en partie décrite dans DÉBORDES *et al.* (1985), consiste alors à condenser les matrices de rigidité élémentaires en éliminant les degrés de liberté redondants. Dans notre exemple, les trois déplacements  $\mathbf{u}^{pér,A}$ ,  $\mathbf{u}^{pér,B}$  et  $\mathbf{u}^{pér,C}$  seraient éliminés au profit des trois autres, ce qui aurait pour conséquence de réduire la taille des matrices élémentaires et donc la taille du système global. Concrètement, cette étape peut être formalisée de la façon suivante :

- soit  $\{\mathbf{u}^{pér}\}$  le vecteur des inconnues nodaux associées au champ de déplacements  $\mathbf{u}^{pér}$ , périodique sur  $\partial V$ ,
- soit  $\{\mathbf{u}_1^{pér}\}$  le sous-ensemble des composantes de  $\{\mathbf{u}^{pér}\}$  sur lesquelles aucune condition de périodicité n'est imposée. Les degrés de liberté concernés sont donc associés à des noeuds qui ne se situent pas sur le bord  $\partial V$  de la cellule de base,
- soient  $\{\mathbf{u}_2^{pér}\}$  et  $\{\mathbf{u}_3^{pér}\}$  les sous-ensembles des composantes de  $\{\mathbf{u}^{pér}\}$  qui correspondent à des noeuds attachés à des faces latérales de  $\partial V$  en vis-à-vis. Ces composantes sont donc

reliées par la relation linéaire :

$$\{\mathbf{u}_2^{pér}\} = \{\mathbf{u}_3^{pér}\} \quad (\text{IV.52})$$

On précise que le champ virtuel  $\{\delta \mathbf{u}^{pér}\}$  obéit aux mêmes conventions. La formulation discrétisée s'écrit alors <sup>9</sup> :  $\forall \delta \mathbf{u}_1^{pér}, \delta \mathbf{u}_2^{pér}, \delta \mathbf{u}_3^{pér}, \delta \mathbf{E}$ ,

$$\langle \delta \mathbf{u}_1^{pér}, \delta \mathbf{u}_2^{pér}, \delta \mathbf{u}_3^{pér}, \delta \mathbf{E} \rangle [\mathbf{K}^{hom}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^{pér} \\ \mathbf{u}_2^{pér} \\ \mathbf{u}_3^{pér} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix} = \langle \delta \mathbf{u}_1^{pér}, \delta \mathbf{u}_2^{pér}, \delta \mathbf{u}_3^{pér}, \delta \mathbf{E} \rangle \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ |V|\boldsymbol{\Sigma} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.53})$$

où  $[\mathbf{K}^{hom}]$  peut s'écrire par blocs, les différents blocs provenant de l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires :

$$[\mathbf{K}^{hom}] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{hom} & \mathbf{K}_{12}^{hom} & \mathbf{K}_{13}^{hom} & \mathbf{K}_{14}^{hom} \\ \mathbf{K}_{12}^{hom,T} & \mathbf{K}_{22}^{hom} & \mathbf{K}_{23}^{hom} & \mathbf{K}_{24}^{hom} \\ \mathbf{K}_{13}^{hom,T} & \mathbf{K}_{23}^{hom,T} & \mathbf{K}_{33}^{hom} & \mathbf{K}_{34}^{hom} \\ \mathbf{K}_{14}^{hom,T} & \mathbf{K}_{24}^{hom,T} & \mathbf{K}_{34}^{hom,T} & \mathbf{K}_{44}^{hom} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.54})$$

En prenant en compte les relations de périodicité liant  $\{\mathbf{u}_2^{pér}\}$  (resp.  $\{\delta \mathbf{u}_2^{pér}\}$ ) à  $\{\mathbf{u}_3^{pér}\}$  (resp.  $\{\delta \mathbf{u}_3^{pér}\}$ ), le système à résoudre se réduit finalement au système suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{hom} & \mathbf{K}_{12}^{hom} + \mathbf{K}_{13}^{hom} & \mathbf{K}_{14}^{hom} \\ \mathbf{K}_{12}^{hom,T} + \mathbf{K}_{13}^{hom,T} & \mathbf{K}_{22}^{hom} + \mathbf{K}_{23}^{hom} + \mathbf{K}_{23}^{hom,T} + \mathbf{K}_{33}^{hom} & \mathbf{K}_{24}^{hom} + \mathbf{K}_{34}^{hom} \\ \mathbf{K}_{14}^{hom,T} & \mathbf{K}_{24}^{hom,T} + \mathbf{K}_{34}^{hom,T} & \mathbf{K}_{44}^{hom} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^{pér} \\ \mathbf{u}_3^{pér} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ |V|\boldsymbol{\Sigma} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.55})$$

La condensation permet donc de passer d'un système bloc  $4 \times 4$  à un système bloc  $3 \times 3$ , ce qui réduit considérablement le coût des calculs, tant en place mémoire qu'en temps. Ce souci de gestion de la place mémoire explique également le fait que cette étape de condensation ait lieu au niveau élémentaire : ceci évite de réserver inutilement de la place mémoire pour la matrice de rigidité globale.

Une fois le chargement macroscopique imposé par l'intermédiaire des degrés de liberté du noeud macroscopique et de leurs forces nodales associées, et une fois les relations de périodicité prises en compte au niveau élémentaire, le problème discrétisé (IV.50) est résolu par SIC, afin qu'une première partie des données des différents problèmes d'optimisation soit disponible : les contraintes purement élastiques en chaque point de GAUSS  $i$  et en chaque point de charge  $P_j$ , notées par la suite  $\boldsymbol{\sigma}_i^{(e)}(P_j)$ ,  $j = 1..2^m$ .

---

9. Afin de simplifier l'exposé, on omet toujours volontairement la dépendance en  $P_j$ .

## IV.4 Discrétisation du problème aux contraintes résiduelles

Ce paragraphe n'est pas nécessaire aux deux approches statique et cinématique. En effet, si les couplages sont traités seulement d'un point de vue cinématique, toutes les données nécessaires à l'expression des problèmes d'optimisation associés sont alors disponibles et il est possible de passer directement au paragraphe suivant traitant de la discrétisation des problèmes d'optimisation. Par contre, si l'approche statique de l'adaptation est adoptée, il est alors nécessaire de discrétiser le problème cellulaire aux contraintes résiduelles, tout comme l'on vient de discrétiser le problème cellulaire purement élastique.

### IV.4.1 Formulation variationnelle spécifique

Contrairement à la formulation variationnelle précédente, il n'est pas possible dans le cas des problèmes locaux aux contraintes résiduelles, de se contenter de travailler sur le problème à déformation imposée puis de généraliser, par analogie, au problème à contrainte imposée. En effet, les deux problèmes  $P_{\text{déf}}^{(r),cl}$  et  $P_{\text{cont}}^{(r),cl}$  ne sont pas similaires puisque la nullité de la moyenne des contraintes résiduelles n'a pas lieu d'être à déformation imposée. Afin de rester le plus général possible, on considère donc le problème cellulaire suivant, issu des problèmes présentés au paragraphe III.3.3.a :

$$P^{(r)} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div} \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0} \quad \text{dans } V \\ \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n} \quad \text{anti périodique sur } \partial V \\ \langle \boldsymbol{\rho} \rangle_V = \mathbf{R} \end{array} \right. \quad (\text{IV.56})$$

sachant que  $\mathbf{R}$  est nul lorsque la contrainte macroscopique est imposée et est un champ *a priori* quelconque lorsque la déformation macroscopique est imposée.

### IV.4.2 Problème discrétisé et matrice d'équilibre

L'équivalence entre la formulation variationnelle (IV.57) et le problème local (IV.56) s'obtient exactement de la même façon que précédemment, en se donnant une cinématique virtuelle de type (IV.27) et en prenant en compte les relations de périodicité (IV.56.b) et de moyenne (IV.56.c). L'ensemble des conditions du problème (IV.56) peut alors s'exprimer comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \delta \mathbf{u}^{pér} \quad \text{périodique sur } \partial V \quad \text{tel que } \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{pér} = \mathbf{grad}_s \delta \mathbf{u}^{pér}, \\ \forall \delta \mathbf{E} \quad \text{homogène sur } V, \\ \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^{pér} + \delta \mathbf{E}) : \boldsymbol{\rho} \, dV = |V| \, \delta \mathbf{E} : \mathbf{R} \end{array} \right. \quad (\text{IV.57})$$

Compte-tenu de la discrétisation (IV.13) de la déformation totale élémentaire et en notant  $\{\boldsymbol{\rho}^e\}$  le vecteur des contraintes résiduelles élémentaires, représentant l'ensemble des contraintes en

chaque point de GAUSS de l'élément, (IV.57) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \{ \delta \mathbf{u}^{per,e} \} \quad \text{périodique sur } \partial V, \\ \forall \{ \delta \mathbf{E} \} \quad \text{homogène sur } V, \\ \sum_{e=1}^{NELT} \langle \delta \mathbf{u}^{per,e}, \delta \mathbf{E} \rangle \int_{V^e} [\mathbf{B}^{hom,e}]^T \{ \boldsymbol{\rho}^e \} dV = |V| \langle \delta \mathbf{E} \rangle \{ \mathbf{R} \} \end{array} \right. \quad (\text{IV.58})$$

La forme discrétisée de (IV.57) est obtenue, après intégration numérique, sous la forme d'un système d'équations linéaires regroupant toutes les conditions d'égalités devant être vérifiées par les contraintes résiduelles :

$$[\mathbf{C}^{hom}] \{ \boldsymbol{\rho} \} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ |V| \mathbf{R} \end{array} \right\} \quad (\text{IV.59})$$

où :

- le vecteur  $\{ \boldsymbol{\rho} \}$  est constitué de la concaténation des composantes des contraintes résiduelles en tous les points de GAUSS de tous les éléments (on note  $NG$  le nombre de points de GAUSS total de la cellule de base :  $NG = NGE * NELT$ ) :

$$\{ \boldsymbol{\rho} \} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\rho}^1(\mathbf{x}^1) \\ \dots \\ \boldsymbol{\rho}^1(\mathbf{x}^{NGE}) \\ \hline \boldsymbol{\rho}^2(\mathbf{x}^1) \\ \dots \\ \boldsymbol{\rho}^2(\mathbf{x}^{NGE}) \\ \hline \dots \\ \dots \\ \hline \boldsymbol{\rho}^{NELT}(\mathbf{x}^1) \\ \dots \\ \boldsymbol{\rho}^{NELT}(\mathbf{x}^{NGE}) \end{array} \right\} \triangleq \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\rho}_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{\rho}_{NG} \end{array} \right\} \quad (\text{IV.60})$$

- la matrice  $[\mathbf{C}^{hom}]$ , ici appelée *matrice d'équilibre*, ne dépend que des propriétés géométriques du problème et résulte de l'assemblage des matrices d'équilibre élémentaires  $[\mathbf{C}^{hom,e}]$ , telles que :

$$[\mathbf{C}^{hom,e}] = \sum_{i=1}^{NGE} \omega_i \det [J_e(\boldsymbol{\xi}^i)] [\mathbf{B}^{hom,e}(\mathbf{x}^i)]^T \quad (\text{IV.61})$$

Pratiquement, une nouvelle commande a été développée dans SIC, de manière à ce que la matrice d'équilibre soit automatiquement générée, quelle que soit la nature du chargement imposé.

#### IV.4.3 Prise en compte des relations de périodicité sur les déplacements virtuels

La prise en compte des relations linéaires entre degrés de liberté est traitée par analogie avec le problème purement élastique. En effet, en adoptant les mêmes notations qu'au paragraphe IV.3.4, on a :  $\forall \delta \mathbf{u}_1^{pér}, \delta \mathbf{u}_2^{pér}, \delta \mathbf{u}_3^{pér}, \delta \mathbf{E}$ ,

$$\langle \delta \mathbf{u}_1^{pér}, \delta \mathbf{u}_2^{pér}, \delta \mathbf{u}_3^{pér}, \delta \mathbf{E} \rangle [\mathbf{C}^{hom}] \{\boldsymbol{\rho}\} = \langle \delta \mathbf{u}_1^{pér}, \delta \mathbf{u}_2^{pér}, \delta \mathbf{u}_3^{pér}, \delta \mathbf{E} \rangle \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ |V|\mathbf{R} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.62})$$

où la matrice d'équilibre est décomposée de la façon suivante :

$$[\mathbf{C}^{hom}] = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{hom} \\ \mathbf{C}_2^{hom} \\ \mathbf{C}_3^{hom} \\ \mathbf{C}_4^{hom} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.63})$$

Compte-tenu de l'égalité entre  $\{\delta \mathbf{u}_2^{pér}\}$  et  $\{\delta \mathbf{u}_3^{pér}\}$ , ce système se réduit au système (IV.64), en ce sens qu'après prise en compte des relations linéaires la matrice d'équilibre comporte moins de lignes : le système par blocs initialement 4\*1 devient un système 3\*1. Cette méthode d'élimination a donc été implémentée dans SIC, sur la base des travaux de MICHEL (DÉBORDES *et al.*, 1985), de façon à agir au niveau élémentaire avant assemblage.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{hom} \\ \mathbf{C}_2^{hom} + \mathbf{C}_3^{hom} \\ \mathbf{C}_4^{hom} \end{bmatrix} \{\boldsymbol{\rho}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ |V|\mathbf{R} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.64})$$

#### IV.4.4 Distinction déformation/contrainte imposée

Fixer la valeur de  $\{\mathbf{R}\}$  à  $\mathbf{0}$ , en cas de contrainte macroscopique  $\{\mathbf{E}\}$  imposée, ou encore la laisser libre, en cas de déformation macroscopique  $\{\boldsymbol{\Sigma}\}$  imposée, devient simple à la lumière de l'interprétation de  $\{\mathbf{E}\}$  et  $\{\boldsymbol{\Sigma}\}$ , en temps que degrés de liberté supplémentaires et forces nodales associées (à la mesure du volume de la cellule de base près). C'est là toute la force de ce noeud fictif, le noeud macroscopique : la formulation spécifique est écrite dans le cas général, puis l'on particularise par l'intermédiaire de conditions limites :

- si l'on travaille à déformation imposée, la façon de laisser libre la moyenne du champ de contraintes résiduelles, représentée par le vecteur discrétisé  $\{\mathbf{R}\}$ , est d'imposer toutes les composantes de la déformation macroscopique  $\{\mathbf{E}\}$  à zéro. Ceci est une conclusion directe de l'écriture (IV.62), que l'on réalise tout aussi simplement que l'on aurait imposé des déplacements à zéro dans un code classique.
- si l'on travaille à contrainte imposée, la moyenne des contraintes résiduelles doit être nulle, ce qui, toujours à la vue du système (IV.62), est réalisé en n'imposant aucune condition limite particulière aux degrés de liberté  $\{\mathbf{E}\}$ .

En conclusion, les conditions d'égalités des problèmes d'optimisation  $P_{déf}^{stat}$  et  $P_{cont}^{stat}$  seront données, dans les deux cas, sous la forme du système (IV.65), à ceci près que dans le cas d'une déformation imposée, la matrice d'équilibre aura été construite en imposant les composantes de  $\{\mathbf{E}\}$  à zéro.

$$[\mathbf{C}^{hom}] \{\boldsymbol{\rho}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (\text{IV.65})$$

#### IV.4.5 Stockage optimisé de la matrice d'équilibre

La définition (IV.60) du vecteur  $\{\boldsymbol{\rho}\}$  incite à octroyer à la matrice d'équilibre  $[\mathbf{C}^{hom}]$  la structure représentée figure IV.3, sur laquelle les lignes grisées correspondent aux emplacements des termes non nuls. Cependant, compte-tenu des relations linéaires entre les degrés de liberté

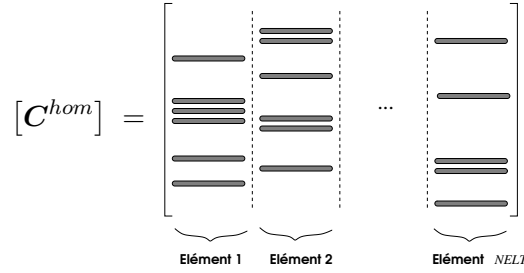


FIGURE IV.3 – Structure de la matrice d'équilibre

des noeuds appartenant aux faces de  $V$  en vis-à-vis, la matrice d'équilibre possède une structure irrémédiablement creuse. De ce fait, afin d'économiser de la place mémoire, seuls les termes de  $[\mathbf{C}^{hom}]$  qui sont, par construction, non nuls ont été stockés. Ceci nécessite l'implémentation dans SIC de deux vecteurs, le premier contenant les informations relatives aux caractéristiques des matrices élémentaires (nombre de degrés de liberté conservés<sup>10</sup> *id est* nombre de lignes de chaque matrice élémentaire, indices de positionnement dans  $[\mathbf{C}^{hom}]$  *id est* indices de début et de fin de colonne pour chacune des matrices élémentaires, *etc*) et le second contenant les valeurs numériques des lignes non nulles répertoriées par le premier. Nous choisissons cependant de ne pas plus nous attarder sur ces détails techniques, qui, bien que possédant un intérêt numérique indéniable, n'en possèdent pas moins un intérêt limité pour cet exposé.

Dans le cas de l'approche statique, cette deuxième étape de discrétisation permet donc d'exprimer rigoureusement les conditions devant être vérifiées par les variables d'optimisation  $\{\boldsymbol{\rho}\}$  sous la forme d'un système d'équations linéaires.

## IV.5 Problèmes d'optimisation discrétisés

Les données nécessaires à l'écriture des différents problèmes d'optimisation,  $P_{déf}^{stat}$ ,  $P_{cont}^{stat}$ ,  $P_{déf}^{cin}$  et  $P_{cont}^{cin}$ , étant rendues disponibles par des calculs éléments finis, reste désormais à exprimer puis à

10. Les degrés de liberté supprimés correspondant soit à une condition limite soit à une relation linéaire.



résoudre ces problèmes<sup>11</sup>. Pour ce faire, il a été utilisé un code traitant des problèmes d'optimisation non linéaire, sous contraintes et à grand nombre de variables d'optimisation. Ce code, LANCELOT (**L**arge **A**nd **N**onlinear **C**onstraints **E**xtended **L**agrangian **O**ptimization **T**echniques) a été développé par CONN *et al.* (1992) et utilise la méthode du Lagrangien augmenté, brièvement présentée au paragraphe I.2.2.b, afin de transformer des problèmes d'optimisation sous contraintes en problèmes d'optimisation sans contraintes. Pour être bref, car il faut reconnaître que LANCELOT a essentiellement été utilisé comme une boîte noire, la résolution des problèmes sans contraintes est ensuite basée sur les méthodes à région de confiance, dont le principe a été exposé au paragraphe I.2.2.a, et la convergence de l'algorithme est testée, à chaque itération, en évaluant la norme du gradient projeté sur la région de confiance.

Il a donc été nécessaire de développer une interface entre le logiciel éléments finis SIC et le logiciel d'optimisation LANCELOT, afin que les résultats issus de SIC soient réutilisables par LANCELOT. Pratiquement, une nouvelle commande a été développée dans SIC, qui exploite les résultats de SIC en vue d'écrire les fichiers d'entrée (au format SIF<sup>12</sup>) de LANCELOT.

#### IV.5.1 Discrétisation de l'approche statique

L'implémentation de la formulation spécifique ainsi que la réalisation de l'interface entre les deux logiciels nous permettent donc d'écrire la forme discrétisée de l'approche statique du couplage entre homogénéisation périodique et adaptation élastoplastique, et plus généralement entre homogénéisation périodique et élasticité ou analyse limite<sup>13</sup>. Pour un domaine de chargements donné, du type de ceux de la figure IV.1, l'analyse consiste donc à déterminer le coefficient maximum que l'on peut lui appliquer, de façon à ce que le comportement recherché soit atteint. Les problèmes d'optimisation discrétisés visant à déterminer le coefficient de charge vis-à-vis de l'adaptation ( $m = n$ ,  $\alpha^c = \alpha^{AD}$ ) et de l'analyse limite ( $m = 0$ ,  $\alpha^c = \alpha^{AL}$ ), s'écrivent donc :

Trouver  $\alpha^c$  tel que :  $\alpha^c = \max_{\{\rho\}, \alpha}(\alpha)$  où  $\{\rho\}$  satisfait :

$$\mathcal{F} \left( \alpha \sigma_i^{(e)}(P_j^0) + \rho_i \right) \leq 0 \quad \forall i = 1..NG, \quad \forall j = 1..2^m \quad (\text{IV.66a})$$

$$\left[ \mathbf{C}^{hom} \right] \{\rho\} = \mathbf{0} \quad (\text{IV.66b})$$

L'approche statique du couplage mène donc à un problème de maximisation non-linéaire sous contraintes. En effet,

- la fonction objectif, qu'est le coefficient de charge  $\alpha$ , est linéaire,
- les contraintes d'égalités sont linéaires puisque représentées par le système d'équations linéaires (IV.66b),

11. Comme aux paragraphes précédents, on ne présente la discrétisation que pour une cellule de base dite *classique*.

12. Standart Input Format.

13. On rappelle que les développements permettent de traiter trois types d'analyses : élasticité, adaptation et analyse limite.

- les contraintes d'inégalités (IV.66a) sont non linéaires du fait de la nature quadratique du critère de VON-MISES.

### REMARQUE IV.3

Le chapitre suivant présentant également des domaines de résistance vis-à-vis de l'élasticité, on précise ici que, dans ce cas, le problème d'optimisation à résoudre se simplifie en :

Trouver  $\alpha^E$  tel que :  $\alpha^E = \max_{\alpha}(\alpha)$  satisfaisant :

$$\mathcal{F}\left(\alpha \boldsymbol{\sigma}_i^{(e)}(P_j^0)\right) \leq 0 \quad \forall i = 1..NG, \forall j = 1..2^n \quad (\text{IV.67})$$

□

### IV.5.2 Discrétisation de l'approche cinématique

La discrétisation de l'approche cinématique utilise également les contraintes purement élastiques en chaque point de charge et en chaque point de GAUSS. Compte-tenu des discrétisations choisies, le couplage cinématique vis-à-vis de l'adaptation et de l'analyse limite s'écrit :

$$\text{Trouver } \alpha^c \text{ t.q. : } \alpha^c = \min_{\{\boldsymbol{\varepsilon}^p\}, \{\mathbf{u}^{pér}\}, \{\mathbf{E}\}} \sum_{i,j} \omega_i \det [J_e(\boldsymbol{\xi}^i)] \sigma_{0,i} \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}_i^p(P_j) : \boldsymbol{\varepsilon}_i^p(P_j)} \quad \text{avec :}$$

$$\sum_j \boldsymbol{\varepsilon}_i^p(P_j) = [\mathbf{B}^{hom,e}(\mathbf{x}^i)] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}^{pér,e} \\ \mathbf{E} \end{array} \right\} \quad \forall i = 1..NG \quad (\text{IV.68a})$$

$$\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}_i^p(P_j) = 0 \quad \forall i = 1..NG, \forall j = 1..2^m \quad (\text{IV.68b})$$

$$\sum_{i,j} \omega_i \det [J_e(\boldsymbol{\xi}^i)] \boldsymbol{\sigma}_i^{(e)}(P_j) : \boldsymbol{\varepsilon}_i^p(P_j) = 1 \quad (\text{IV.68c})$$

où  $\sigma_{0,i}$  est la contrainte seuil au  $i^{\text{ème}}$  point de GAUSS. L'approche cinématique du couplage mène donc à un problème de minimisation non linéaire sous contraintes. En effet,

- la fonction objectif, qu'est l'énergie dissipée plastiquement au cours du cycle de déformations  $\{\boldsymbol{\varepsilon}^p\}$ , est non linéaire,
- les contraintes d'optimisation, qui ne sont, contrairement à l'approche statique, que des contraintes d'égalités, sont toutes linéaires.

### REMARQUE IV.4

Si l'on travaille à déformation imposée, il convient, tout comme pour l'approche statique, de bloquer les degrés de liberté de la déformation macroscopique (qui sont également des variables d'optimisation) à zéro dans l'expression de la contrainte d'égalités (IV.68a).

□

### IV.5.3 Obtention des domaines de résistances macroscopiques

Les résultats issus des résolutions précédentes fournissent alors trois types de coefficients : le coefficient de charge vis-à-vis de l'élasticité :  $\alpha^E$ , de l'adaptation :  $\alpha^{AD}$  et de l'analyse limite :  $\alpha^{AL}$ , pour une orientation  $r\delta$  du domaine initial de chargement (figure (IV.4)). Ces coefficients permettent donc d'obtenir des domaines finaux de résistance, respectivement  $\mathcal{D}_r^E$ ,  $\mathcal{D}_r^{AD}$  et  $\mathcal{D}_r^{AL}$ , dont l'interprétation est la suivante :

- tout chargement  $\mathcal{P}(t)$  inclus dans  $\mathcal{D}_r^E$  conduira assurément à une réponse purement élastique de la cellule de base,
- tout chargement  $\mathcal{P}(t)$  inclus dans  $\mathcal{D}_r^{AD}$  conduira assurément à l'adaptation de la cellule de base,
- tout chargement  $\mathcal{P}(t)$  proportionnel<sup>14</sup>, dont l'une des extrémités coïncide avec l'origine et l'autre avec le point  $P_1$  de  $\mathcal{D}_r^{AL}$ , conduira à la ruine plastique de la structure.

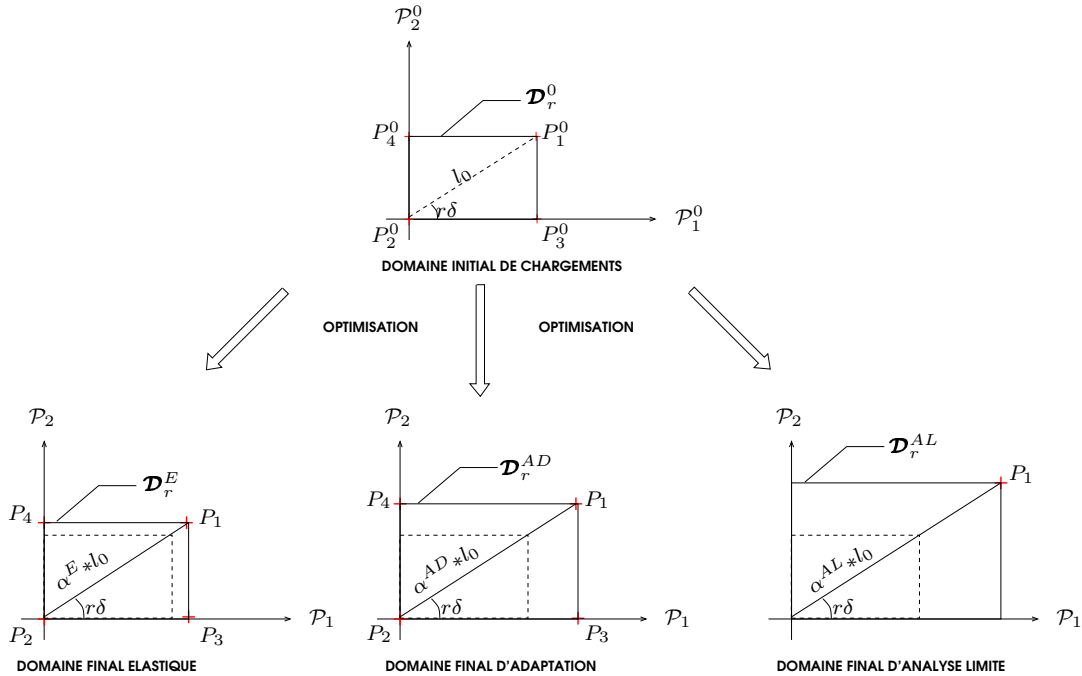


FIGURE IV.4 – Amplification du domaine initial de chargements pour les trois types d'analyses

L'objectif est alors de réitérer le processus pour différentes orientations  $r\delta$  dans l'espace des charges, afin d'obtenir des enveloppes de domaines de résistance. Comme le montre la figure IV.5, l'enveloppe des domaines initiaux est alors définie par :

$$\mathcal{H}^0 = \bigcup_{r=1..p} \mathcal{D}_r^0 \quad (\text{IV.69})$$

14. A la lumière de la remarque I.1, le chargement peut en fait être quelconque à l'intérieur de  $\mathcal{D}_r^E$ , puis proportionnel de  $\mathcal{D}_r^E$  à  $\mathcal{D}_r^{AL}$ . Cependant, le prolongement de la partie proportionnelle du segment représentant le chargement doit passer par l'origine.

De même, l'enveloppe des domaines finaux est définie par :

$$\mathcal{H} = \bigcup_{r=1..p} \mathcal{D}_r \quad (\text{IV.70})$$

Pratiquement, l'obtention de  $\mathcal{H}^E$ ,  $\mathcal{H}^{AD}$  et  $\mathcal{H}^{AL}$  a été entièrement automatisée, de façon à ce que les modifications engendrées par les variations de  $r$ , entre 1 et  $p$ , soient transparentes pour l'utilisateur.

Le terme d'*enveloppe* n'est en fait approprié que pour l'élasticité et l'adaptation, c'est-à-dire pour les types d'analyses utilisant  $2^n$  points de charges par domaine initial. Pour expliquer ceci, prenons l'exemple de l'enveloppe d'adaptation  $\mathcal{H}^{AD}$ . De par la définition même des domaines initiaux  $\mathcal{D}_r^0$ ,  $r = 1..p$ , tous les chargements inclus dans  $\mathcal{H}^{AD}$  ne conduiront pas assurément à l'adaptation de la cellule de base. En effet, seuls les chargements pouvant également être inclus dans un rectangle homothétique aux rectangles initiaux<sup>15</sup> conduiront assurément à l'adaptation. Par exemple, tout chargement inclus dans le rectangle  $\mathcal{D}_r$  de la figure IV.5 conduit avec certitude à l'adaptation de la cellule de base. N'ayant étudié qu'un seul type de rectangle initial, nous ne sommes pas en mesure de conclure concernant les chargements ne vérifiant pas cette propriété.

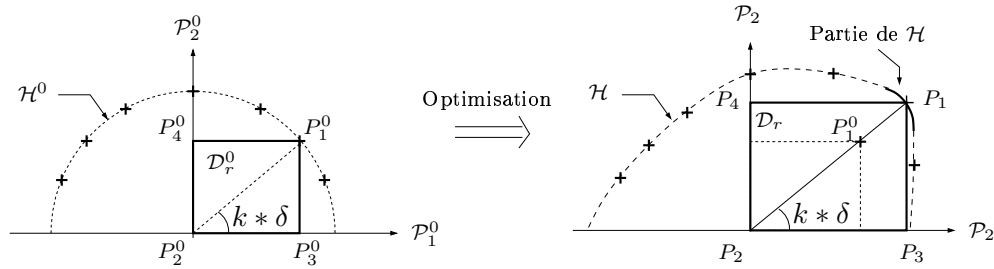


FIGURE IV.5 – Enveloppes initiale et finale des domaines d'adaptation

## IV.6 Récapitulatif d'un calcul de résistance à l'élasticité, à l'adaptation et à l'analyse limite

Ce paragraphe résume les différentes étapes conduisant à l'obtention des domaines de résistance macroscopiques, vis-à-vis des trois types d'analyses jusqu'alors étudiés : l'élasticité, l'adaptation et l'analyse limite.

L'utilisateur doit être en mesure de fournir un certain nombre de renseignements décrivant avec précision le problème qu'il souhaite étudier :

- les caractéristiques ayant trait à la cellule de base, à savoir :
  - ses caractéristiques géométriques,

15. C'est-à-dire dont le point  $P_2$  est confondu avec l'origine et dont le point  $P_4$  appartient à la courbe maîtresse de  $\mathcal{H}$ .

- ses caractéristiques matérielles, en particulier<sup>16</sup> le module de YOUNG, coefficient de POISSON et contrainte seuil d'élasticité de chacun des matériaux constitutifs,
- le maillage choisi pour étudier les comportements de cette cellule,
- les relations linéaires entre degrés de liberté des faces de la cellule de base qui se correspondent par périodicité.
- les caractéristiques ayant trait au chargement macroscopique imposé, à savoir :
  - la nature de ce chargement (déformation ou contrainte macroscopique),
  - le domaine de variations de ce chargement, défini par l'intermédiaire des bornes des rectangles  $\mathcal{D}_r^0$ .
- la précision avec laquelle il souhaite tracer les domaines – ou enveloppes – finaux, c'est-à-dire la valeur de la variable  $p$ , qui définit la discrétisation du demi-espace initial (respectivement final) des charges<sup>17</sup> en  $\frac{\Pi}{(p+1)}$  rectangles initiaux  $\mathcal{D}_r^0$  (respectivement rectangles finaux  $\mathcal{D}_r$ ), soit encore en  $(p+1)$  directions de recherches.

La suite de la procédure est ensuite entièrement automatisée de façon à être transparente pour l'utilisateur. On précise cependant que cette automatisation n'est à l'heure actuelle mise en place que pour l'approche statique des couplages. En effet, l'approche cinématique ayant largement été étudiée dans la littérature, en particulier par les récents travaux de MAIER *et al.* (2000), elle n'a été utilisée, dans notre étude, qu'en tant que validation et corroboration des résultats de l'approche statique pour l'un des exemples traités au chapitre suivant : un matériau stratifié bi-couche. L'approche statique constitue donc l'apport numérique essentiel de nos travaux. Les deux dernières étapes d'obtention des domaines sont donc les suivantes :

- les trois coefficients de charge  $\alpha^E$ ,  $\alpha^{AD}$  et  $\alpha^{AL}$  sont calculés, pour chacune des  $(p+1)$  directions de recherches, par des appels successifs et interagissants aux logiciels d'éléments finis (SIC) et d'optimisation (LANCELOT),
- finalement, les  $3 * (p+1)$  points obtenus permettent ensuite de tracer chacune des enveloppes  $\mathcal{H}^E$ ,  $\mathcal{H}^{AD}$  et  $\mathcal{H}^{AL}$ .

Le schéma de synthèse IV.6 résume cette procédure pour une direction de recherche fixée. Une commande a également été développée dans SIC afin de vérifier les résultats retournés par LANCELOT pour l'approche statique. Cette commande permet donc de vérifier :

- dans le cas de la recherche du coefficient de charge élastique, si l'inégalité (IV.67) est effectivement vérifiée pour le  $\alpha^E$  trouvé,
- dans le cas de la recherche des coefficients de charge à l'adaptation et à l'analyse limite, si les contraintes d'inégalités (IV.66a) et d'égalités (IV.66b) sont satisfaites pour le couple solution  $(\alpha^{AD,AL}, \{\rho\})$ .

16. On rappelle que les développements sont applicables pour des matériaux élastoplastiques parfaits.

17. La symétrie du critère de VON-MISES par rapport à l'origine de l'espace des charges impliquant la symétrie centrale des enveloppes finales, seul les demi-domaines  $(\mathcal{P}_1^0, \mathcal{P}_2^0)$  et  $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$  sont examinés.

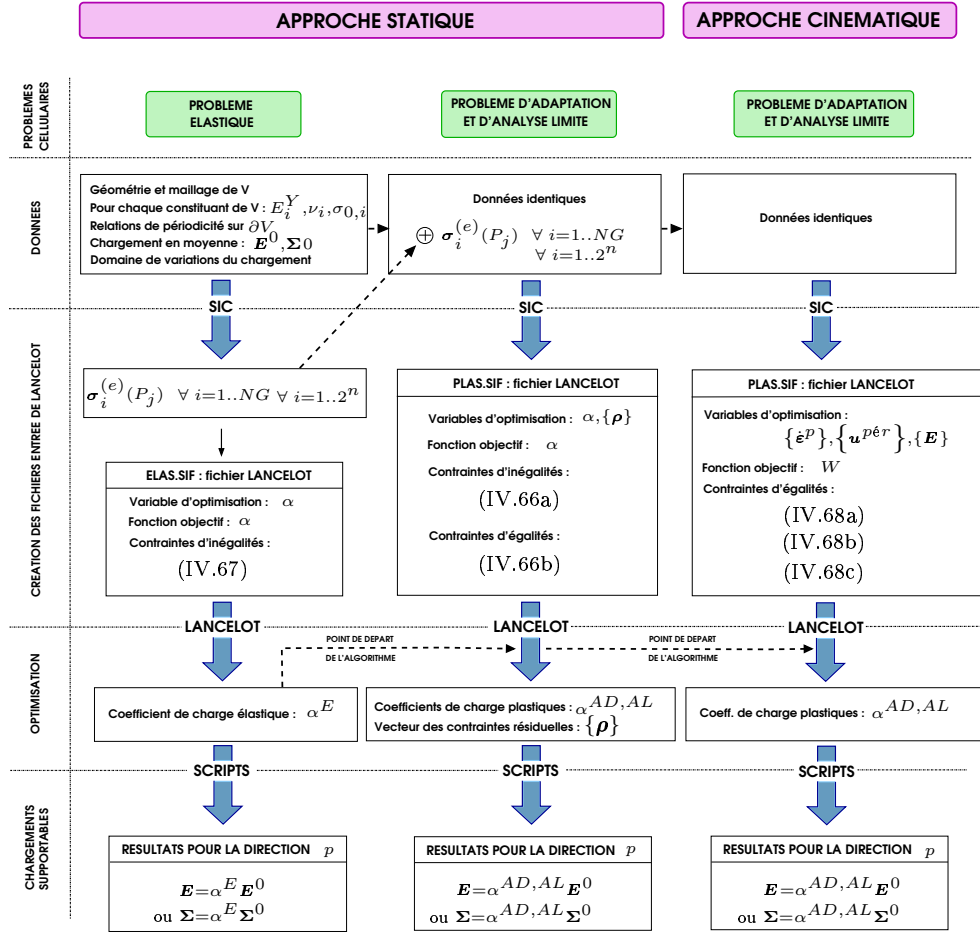


FIGURE IV.6 – Schéma de synthèse de la méthode numérique proposée

## IV.7 Bilan du chapitre

Ce chapitre était consacré à la mise en œuvre numérique des couplages présentés aux chapitres précédents. Sans rentrer dans le détail de la programmation ayant conduit à l'élaboration de la méthode numérique, nous avons successivement exposé chacune des étapes nécessaires à l'obtention des domaines de résistance tels qu'ils seront présentés au chapitre V. En ce sens, nous avons donc souhaité mettre en lumière, tout au long de ce quatrième chapitre, les spécificités numériques inhérentes à ces couplages. On retiendra donc :

- la double discrétisation spatiale et temporelle. En effet, l'implémentation nécessite une discrétisation spatiale, classique à la méthode des éléments finis, mais également une discrétisation temporelle, nécessaire pour représenter les variations du chargement macroscopique par l'intermédiaire de différents points de charge ;
- la technique du noeud macroscopique. En effet, ce noeud fictif supplémentaire, pratiquement ajouté à la table de connectivité de chacun des éléments du maillage de la cellule de base, permet, non seulement d'imposer facilement un chargement en moyenne, mais

également de travailler tout aussi aisément à déformation qu'à contrainte imposée ;

- la prise en compte des relations de périodicité au niveau élémentaire, afin d'optimiser la place mémoire réservée et donc les temps de calculs, tant pour la résolution du problème cellulaire élastique que pour le calcul de la matrice d'équilibre ;
- la formulation spécifique, qui permet de prendre en compte à la fois les relations de moyenne et de périodicité, de manière à regrouper l'ensemble des conditions, devant être satisfaites par les contraintes résiduelles, sous la forme d'un système d'équations linéaires, ne dépendant que des paramètres géométriques du problème étudié.

Finalement, on dispose d'un outil général, puisque la méthode numérique proposée possède un caractère tout à fait général, en ce sens que :

- elle est applicable quelle que soit la cellule de base tridimensionnelle considérée, sans restriction de complexité. La seule limitation provient du logiciel d'optimisation LANCELOT : si le nombre de variables d'optimisation devient trop important (en pratique et selon les résultats présentés au chapitre suivant, pour un nombre de variables d'optimisation supérieur à 25000), la phase "optimisation" des calculs peut devenir très prohibitive en termes de temps de calculs,
- elle est tout aussi applicable si l'on ne souhaite pas faire appel à la théorie de l'homogénéisation, mais directement travailler sur une structure complète.

## CHAPITRE V

# Validations et applications de la méthode numérique développée

---

**C**e dernier chapitre est consacré aux validations et applications de la méthode numérique proposée. Selon la logique adoptée jusqu'à présent, on y étudie les trois types de cellules de base présentés au chapitre I. En ce sens, le premier matériau étudié, un matériau stratifié, présente une cellule de base dite de type classique. Les fonctionnalités des développements réalisés sont mises en lumière sur cet exemple autorisant de très rapides calculs et ayant beaucoup moins été étudié dans la littérature par rapport aux autres matériaux. On s'intéresse ensuite à un matériau possédant une cellule de base à cavités, que l'on sollicite dans son plan de périodicité. Plus général, le paragraphe suivant considère des cellules de base représentatives de cellules de type plaques, sollicitées par des chargements généralisés plans et hors-plans. On étudie en premier lieu une plaque homogène, puis une plaque raidie par des renforts en I présentant une périodicité dans une direction de l'espace, et enfin une plaque perforée présentant des propriétés de périodicité dans deux directions de l'espace. Finalement, le dernier paragraphe traite d'un matériau élastoplastique renforcé par des inclusions sphériques élastiques, possédant donc une cellule de base classique mais une réelle périodicité dans les trois directions de l'espace. Les domaines de résistance macroscopiques sont tracés pour chacun de ces cas, après avoir résolu les problèmes cellulaires élastiques associés et les problèmes d'optimisation couplés qui en découlent.

---



## PLAN DU CHAPITRE V

---

<b>V.1 Etude d'un matériau stratifié 1D-périodique . . . . .</b>	<b>153</b>
V.1.1 Présentation du problème . . . . .	153
V.1.2 Choix et maillage de la cellule de base . . . . .	154
V.1.3 Simulations numériques par l'approche statique . . . . .	155
V.1.3.a Comparaisons analytique/numérique: cas d'un chargement uni- dimensionnel . . . . .	156
V.1.3.b Domaines macroscopiques à déformation imposée . . . . .	157
V.1.3.c Domaines macroscopiques à contrainte imposée . . . . .	161
V.1.4 Simulations numériques par l'approche cinématique et réflexions . . . . .	164
<b>V.2 Etude d'une structure fine perforée, sollicitée en contrainte dans son   plan . . . . .</b>	<b>166</b>
V.2.1 Présentation du problème tridimensionnel . . . . .	166
V.2.2 Choix de la cellule de base . . . . .	167
V.2.3 Tracé des différents domaines de résistance macroscopiques . . . . .	168
<b>V.3 Etude de plaques périodiques hétérogènes en membrane et en flexion</b>	<b>170</b>
V.3.1 Etude d'une plaque homogène . . . . .	170
V.3.2 Etude d'une plaque renforcée 1D-périodique . . . . .	172
V.3.3 Etude d'une plaque trouée 2D-périodique . . . . .	173
<b>V.4 Etude d'un matériau 3D-périodique à inclusions sphériques . . . . .</b>	<b>175</b>
V.4.1 Présentation du problème tridimensionnel . . . . .	175
V.4.2 Choix, maillage et chargement de la cellule de base . . . . .	176
V.4.3 Domaines macroscopiques à contrainte imposée . . . . .	177
<b>V.5 Bilan du chapitre . . . . .</b>	<b>178</b>

---

— **Avertissement** — Les notations utilisées dans ce chapitre pour représenter les chargements imposés obéissent aux conventions suivantes :

- dans le cas où  $n = 1$ , l'on entend par "on impose  $2E_{12}$ ", non seulement que la composante  $2E_{12}$  de  $\mathbf{E}$  est imposée non nulle, mais également que les autres composantes sont nulles, ce qui revient à imposer :  $(E_{11} = 0, E_{22} = 0, E_{33} = 0, 2E_{12} \neq 0, 2E_{23} = 0, 2E_{13} = 0)$ ,
- de même, dans le cas où  $n = 2$ , écrire "on impose le couple  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ " signifie que l'on impose le chargement suivant :  $(\Sigma_{11} \neq 0, \Sigma_{22} \neq 0, \Sigma_{33} = 0, \Sigma_{12} = 0, \Sigma_{23} = 0, \Sigma_{13} = 0)$ .

La même convention vaut pour les chargements généralisés.

## V.1 Etude d'un matériau stratifié 1D-périodique

L'objectif de cette première partie est d'étudier, cette fois-ci numériquement, le matériau stratifié des paragraphes III.5 et III.6, alors calculé analytiquement afin de présenter simplement les bases de la méthode numérique proposée au chapitre IV. Après un bref rappel des données du problème, en particulier de la cinématique choisie et des problèmes cellulaires à résoudre, le stratifié est tout d'abord étudié par l'approche statique. Le chargement est en premier lieu imposé sous la forme d'une déformation macroscopique, puis, dans un second temps, sous la forme d'une contrainte macroscopique. En vue de valider les résultats de l'approche statique, mais également de comparer les temps de calculs des deux approches, le stratifié est ensuite étudié par l'approche cinématique, pour un unique cas de chargements<sup>1</sup>.

### V.1.1 Présentation du problème

On considère donc le matériau stratifié tridimensionnel de la figure (V.1), périodique dans une direction de l'espace : la direction  $\mathbf{X}_3$ , et invariant selon les deux autres directions  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$ . Les caractéristiques géométriques et matérielles sont celles données par le tableau III.1, que l'on redonne figure V.1. On se propose de tracer les domaines de résistance de ce matériau vis-à-vis

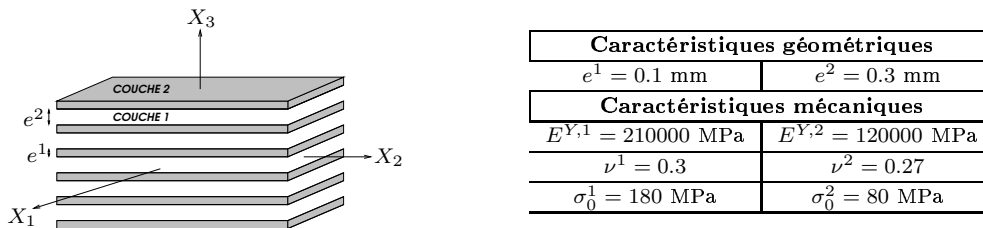


FIGURE V.1 – Matériau stratifié : caractéristiques géométriques et mécaniques

de l'élasticité, de l'adaptation élastoplastique et de l'analyse limite. Selon la méthode décrite au chapitre précédent, ces domaines sont obtenus à partir de domaines initiaux de chargements, soit

1. Les résultats présentés dans ce paragraphe ont donné lieu aux communications de MAGOARIEC *et al.* (2002) et MAGOARIEC *et al.* (2003a), respectivement pour l'approche statique et cinématique.

dans l'espace des déformations macroscopiques, soit dans l'espace des contraintes macroscopiques, comme le montre la figure V.2.

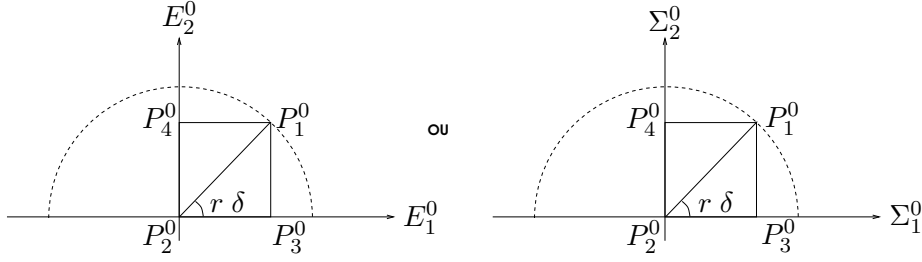


FIGURE V.2 – Enveloppe des chargements initiaux en déformation ou en contrainte

### V.1.2 Choix et maillage de la cellule de base

Comme précisé au paragraphe III.5.2.a, du fait des propriétés de périodicité et d'invariance, le motif décrivant entièrement le matériau peut se ramener à un segment, contenant une épaisseur de chacune des deux couches. Cependant, afin d'exploiter les capacités de la méthode, développée pour des cellules de bases 3D, la cellule de base considérée est tridimensionnelle, telle celle de la figure III.9. La cellule est donc représentée par un parallélépipède, constitué de la superposition d'un type de chacune des deux couches et de dimensions quelconques<sup>2</sup> dans le plan parallèle aux couches. Les propriétés d'invariance dans les directions  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$  autorisent de ne mailler la cellule qu'avec un élément par couche  $c^i$ ,  $i = 1, 2$ . On choisit donc de mailler chaque couche avec un élément quadratique à 20 noeuds, traditionnellement noté H20, calculé en intégration réduite<sup>3</sup> (figure V.3). D'après les rappels du chapitre I, le chargement imposé,  $\mathbf{E}^0$  ou  $\Sigma^0$ , associé

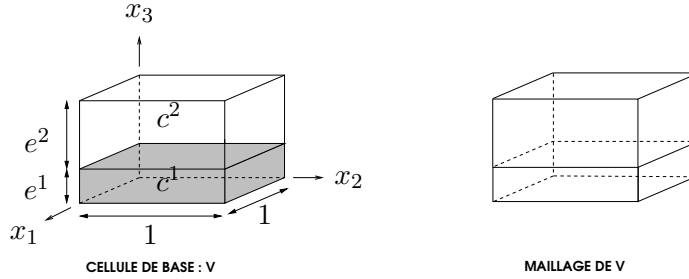


FIGURE V.3 – Cellule de base parallélépipédique et maillage de cette cellule

à la géométrie régulière de la cellule de base, en ce sens que cette dernière ne présente ni trou ni fissure, impliquent que :

- la cinématique est choisie de la forme (I.40),
- le problème cellulaire élastique de localisation à résoudre s'écrit  $P_{\text{def}}^{(e),cl}$  ou  $P_{\text{cont}}^{(e),cl}$ ,

2. Pour fixer les idées, ces dimensions sont prises égales à l'unité.

3. Les résultats des simulations sont identiques en intégration exacte.

- dans le cas de l'approche statique, le problème cellulaire aux contraintes résiduelles s'écrit  $P_{déf}^{(r),cl}$  ou  $P_{cont}^{(r),cl}$ .

### V.1.3 Simulations numériques par l'approche statique

L'objectif des simulations présentées dans ce paragraphe est double : le premier est relatif à la validation de la méthode numérique développée alors que le second concerne plus précisément l'étape d'exploitation des domaines de résistance macroscopiques obtenus. Pour ce faire, et afin de ne pas dédoubler les résultats et leurs analyses, on choisit volontairement de ne travailler que sur quelques cas de chargements. A titre d'illustration, il a donc été choisi d'organiser ce paragraphe de la façon suivante :

- l'équivalence des directions 1 et 2 vis-à-vis du comportement du stratifié est mise en évidence pour un chargement en déformation,
- les domaines d'adaptation obtenus sont également validés sur la base d'un chargement en déformation, par comparaison avec une méthode directe de la littérature,
- les domaines d'analyse limite obtenus sont, quant-à-eux, validés sur la base d'un chargement en contrainte, par comparaison avec deux autres méthodes de la littérature, l'une incrémentale, l'autre analytique,
- quelques comparaisons de capacités de résistance sont présentées pour différents plans de chargements en déformation et en contrainte,
- et enfin, on présente sur l'exemple d'un chargement en contrainte, la manière d'analyser les domaines tracés.

Compte-tenu du choix de la cellule de base et de la cinématique, les différents résultats de ce paragraphe sont issus des résolutions des problèmes d'optimisation  $P_{déf}^{stat}$  et  $P_{cont}^{stat}$ , représentant respectivement les couplages "théorème III.1 +  $P_{déf}^{(e),cl}$  +  $P_{déf}^{(r),cl}$ " et "théorème III.1 +  $P_{cont}^{(e),cl}$  +  $P_{cont}^{(r),cl}$ ". A titre indicatif, le problème d'optimisation visant à déterminer le coefficient de charge à l'adaptation possède alors :

- 97 variables d'optimisation, 64 contraintes d'inégalités et 6 contraintes d'égalités à déformation imposée,
- 97 variables d'optimisation, 64 contraintes d'inégalités et 12 contraintes d'égalités à contrainte imposée.

On précise que les graphes présentés aux paragraphes V.1.3.b et V.1.3.c ont été obtenus à partir de simulations utilisant 101 rectangles sur le demi-espace, ce qui définit les valeurs et variations de  $\delta$  et de  $r$  comme suit :

$$\begin{cases} \delta = 1.8^\circ \\ r \in [0,100] \end{cases} \Rightarrow p = 101 \quad (V.1)$$

### V.1.3.a Comparaisons analytique/numérique : cas d'un chargement unidimensionnel

Avant de tracer des domaines de résistance macroscopiques entiers, on s'attache à valider la méthode<sup>4</sup> pour une direction de recherche particulière, c'est-à-dire, pour un unique domaine initial de chargement  $\mathcal{D}_r^0$  et non pas pour l'enveloppe  $\mathcal{H}^0$  entière. Pour ce faire, on se base sur l'exemple analytique étudié aux paragraphes III.5 et III.6. Le stratifié est alors soumis à des chargements cisaillement plan unidimensionnels en déformation et en contrainte, tels que :

$$\begin{cases} \mu^- 2E_{12}^0 \leq 2E_{12} \leq \mu^+ 2E_{12}^0 \\ \mu^- \Sigma_{12}^0 \leq \Sigma_{12} \leq \mu^+ \Sigma_{12}^0 \end{cases} \quad (\text{V.2})$$

où  $\mu^- = 0$ ,  $\mu^+ = 1$ ,  $2E_{12}^0 = 10^{-3}$  et  $\Sigma_{12}^0 = 105$  MPa. Après exploitations des symétries, des équations d'équilibre, de moyenne et de périodicité, les différents coefficients de charge ont été définis par les formules littérales :

- (III.56) et (III.60) à déformation imposée,
- (III.89) et (III.96) à contrainte imposée.

Le même problème est alors résolu par la méthode numérique développée. Le tableau V.1 présente les résultats des applications numériques issues des formules analytiques ainsi que les résultats retournés par la méthode numérique. Ces résultats permettent donc de valider la méthode dans le

	Analytique		Numérique	
	App. déf.	App. cont.	App. déf.	App. cont.
$\alpha^E$	0.97765	0.51792	0.97765	0.51792
$\alpha^{AD}$	1.95529	0.57735	1.95529	0.57735
$\alpha^{AL}$	×	0.57735	×	0.57735

TABLEAU V.1 – Comparaisons analytique/numérique pour un chargement unidimensionnel

cas d'un chargement unidimensionnel en déformation et en contrainte. Ils permettent également d'affirmer que :

- la cellule de base ne plastifie pas si le chargement qui lui est imposé observe les variations suivantes :

$$\begin{cases} 0 \leq 2E_{12} \leq 9.7765 * 10^{-4} \\ 0 \leq \Sigma_{12} \leq 54.3816 \text{ MPa} \end{cases} \quad (\text{V.3})$$

- la cellule de base retrouve un comportement purement élastique, après être passée par une phase de plastification, si le chargement variable imposé vérifie :

$$\begin{cases} 0 \leq 2E_{12} \leq 1.95529 * 10^{-3} \\ 0 \leq \Sigma_{12} \leq 60.6218 \text{ MPa} \end{cases} \quad (\text{V.4})$$

4. On rappelle que cette première validation concerne l'approche statique du couplage.

Pour reprendre la figure III.6, le domaine<sup>5</sup> final élastique est obtenu, par exemple dans le cas d'une déformation imposée, après réduction du domaine initial par une homothétie de rapport  $\alpha^E < 1$ , alors que le domaine final d'adaptation est obtenu après augmentation du domaine initial par une homothétie de rapport  $\alpha^{AD} > 1$ . On remarque également, à contrainte imposée, que le coefficient de charge à l'adaptation est égal au coefficient de charge limite : ceci semble un fait caractéristique des chargements unidimensionnels du stratifié. En effet, dans le cas où  $n = 1$ , par comparaison des résolutions graphiques (III.12) et (III.13), force est de constater que les quatre droites horizontales représentant, sur la figure (III.13), les conditions d'optimisation au point de charge  $P_1 = 0$ , n'influencent aucunement la valeur du coefficient de charge limite trouvée en raisonnant sur la figure (III.12). Or, par comparaison des problèmes d'optimisation (III.92) et (III.95), les équations liées à ce point de charge sont l'unique différence entre les deux types d'analyses lorsque  $n = 1$  : il est donc normal de retrouver, dans les deux cas, la même valeur pour les coefficients de charge.

### V.1.3.b Domaines macroscopiques à déformation imposée

On s'intéresse désormais à une validation plus générale de la méthode numérique proposée, en traçant les enveloppes<sup>6</sup> des domaines de résistance macroscopiques. Ces enveloppes sont, dans un premier temps, calculées à déformation imposée, afin de comparer les résultats obtenus avec ceux des travaux de MAGOARIEC (2000) et HACHEMI *et al.* (2001), qui ont développé, et implémenté numériquement dans le logiciel LPNLP<sup>7</sup> (PIERRE et LOWE, 1975), une méthode analytique permettant d'étudier le comportement d'un stratifié soumis à un tel chargement. Les résultats présentés ci-après font donc office de validations de la méthode, mais également d'application, en ce sens qu'ils permettent de mettre en évidence certaines propriétés liées au comportement du stratifié sous chargement variable.

#### ■ Remarque préliminaire relative aux domaines et enveloppes d'élasticité

Les enveloppes d'élasticité tracées ne doivent pas être interprétées comme des domaines d'élasticité classiques, d'où la préférence pour l'appellation *enveloppe*. En effet, afin de pouvoir comparer les enveloppes d'adaptation aux enveloppes d'élasticité, il faut considérer des chargements de même nature : les chargements choisis observent donc, dans les deux cas, les mêmes variations<sup>8</sup>. La figure V.4, tracée dans le plan  $\left(\frac{E_{11}}{E_{11}^0}, \frac{E_{22}}{E_{22}^0}\right)$ , avec  $E_{11}^0 = E_{22}^0 = 10^{-3}$ , met en lumière la distinction entre les deux types de résultats :

- la courbe dont la légende est "E – SIC/LANCELOT – 1PC", représente le domaine de résis-

5. Un segment dans notre cas de chargement unidimensionnel.

6. Ce terme est toujours à prendre au sens de *domaine* dans le cas de l'analyse limite, et dans le sens d'*enveloppe* dans le cas de l'élasticité et de l'adaptation élastoplastique.

7. LPNLP –Linear Programming and Non Linear Programming– est un logiciel d'optimisation non linéaire capable de traiter de problèmes à petits nombre de variables d'optimisation, basé, tout comme LANCELOT, sur les méthodes de Lagrangien augmentés.

8. Ceci explique que l'on ait choisi, au paragraphe III.5, les mêmes variations pour rechercher les coefficients de charge élastique et à l'adaptation.

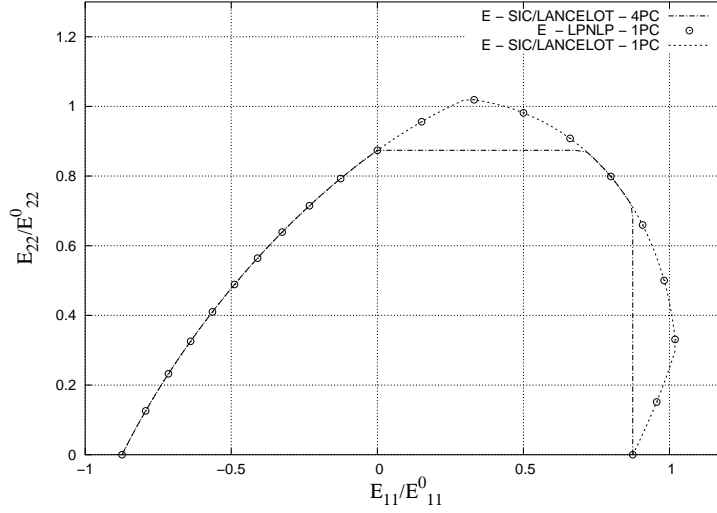


FIGURE V.4 – Matériau stratifié calculé dans le plan  $(E_{11}, E_{22})$  :  $E$  - Enveloppe d'élasticité,  $AD$  - Enveloppe d'adaptation

tance macroscopique vis-à-vis de l'élasticité, au sens classique du terme. En d'autres mots, ce domaine est obtenu en ne considérant que le point de charge  $P_1^0$  de la figure V.2 ;

- la courbe dont la légende est " $E - SIC/LANCELOT - 4PC$ " représente également le domaine de résistance macroscopique vis-à-vis de l'élasticité, mais doit être comprise comme une enveloppe de domaines rectangulaires  $\mathcal{D}_r^0$ ,  $r = 1..p$ , d'où la définition (IV.70).

Par souci de comparaison entre les enveloppes élastiques et d'adaptation, les domaines d'élasticité tracés dans la présente étude seront toujours du deuxième type, que l'on travaille à déformation ou à contrainte imposée. Des domaines du premier type seraient adéquats uniquement en vue d'une comparaison entre les domaines d'élasticité et d'analyse limite, et ce à contrainte imposée. Il faut néanmoins remarquer que l'enveloppe d'élasticité sera toujours, par construction même, incluse dans le domaine d'élasticité.

Comme le montre la figure V.4, les développements réalisés permettent de tracer les deux types de résultats. De plus, cette figure comporte également le domaine d'élasticité classique (du premier type) obtenu avec les développements réalisés dans LPNLP. Ceci constitue une seconde phase de validation de notre méthode : en effet, ce dernier domaine et celui obtenu avec le couplage entre SIC et LANCELOT coïncident parfaitement.

#### ■ Mise en évidence de l'équivalence des directions 1 et 2

La figure V.5 présente les enveloppes d'élasticité et d'adaptation du même matériau sollicité dans les deux plans  $(E_{11}, E_{33})$  et  $(E_{22}, E_{33})$ . Cette deuxième application illustre l'équivalence des directions 1 et 2 vis-à-vis du chargement, du fait de l'invariance matérielle dans ces directions : les deux graphes sont effectivement identiques. La confirmation par le calcul de cette propriété

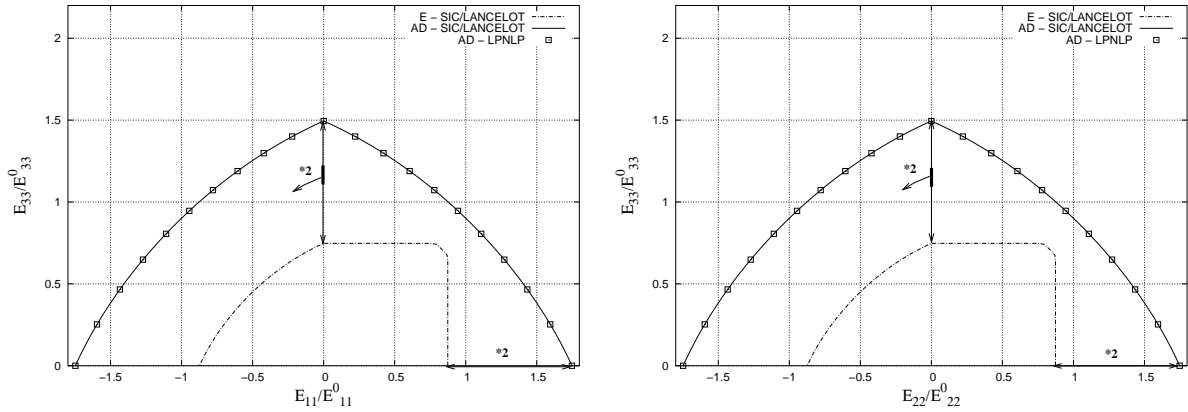


FIGURE V.5 – Matériau stratifié calculé dans les plans  $(E_{11}, E_{33})$  et  $(E_{22}, E_{33})$  :  $E$  - Enveloppe d'élasticité,  $AD$  - Enveloppe d'adaptation ( $E_{11}^0 = E_{22}^0 = E_{33}^0 = 10^{-3}$ )

d'invariance constitue déjà un atout en faveur de la validation, fut-il uniquement qualitatif. La confirmation quantitative est quant-à-elle assurée du fait de la bonne corrélation entre notre enveloppe d'adaptation et celle obtenue par les développements dans LPNLP. Cette constatation permet alors d'étendre la validité de la méthode aux cas de domaines de chargements entiers, et non simplement à une direction de chargements, comme le montrait l'application numérique précédente (paragraphe V.1.3.a). On remarque également que l'enveloppe d'adaptation correspond au double de l'enveloppe d'élasticité pour toutes les directions de charge du quart de plan  $(E_{11} \leq 0, E_{22} \geq 0)$ .

#### ■ Comparaisons entre certaines capacités de résistance

La figure V.6 permet de nouveau de valider la méthode, cette fois-ci pour des calculs dans le plan  $(E_{11}, E_{22})$ . En effet, elle exhibe une nouvelle fois une bonne corrélation entre nos résultats et ceux obtenus avec LPNLP. Cette figure met également en lumière, et permet de comparer, les capacités de résistance liées à chacun des plans de chargements : que ce soit vis-à-vis de l'élasticité ou de l'adaptation, le matériau résiste mieux dans le plan de chargements  $(E_{11}, E_{22})$  que dans le plan de chargements  $(E_{11}, E_{33})$ , en particulier pour les directions suivantes :

$$\begin{cases} 36^\circ \leq r \delta \leq 172.8^\circ & \text{pour l'élasticité} \\ 18^\circ \leq r \delta \leq 162^\circ & \text{pour l'adaptation} \end{cases} \quad (\text{V.5})$$

Enfin, la propriété observée sur les graphes de la figure V.5 restent valables, à savoir que pour les chargements unidimensionnels  $E_{11}$  et  $E_{33}$ , le coefficient de charge à l'adaptation vérifie :

$$\alpha^{SD} = 2 \alpha^E \quad (\text{V.6})$$

La figure suivante (figure V.7) confirme la prédominance de la direction 2 sur la direction 3, en termes de capacité de résistance. Fait remarquable, les plans de chargements  $(E_{11}, E_{12})$  et



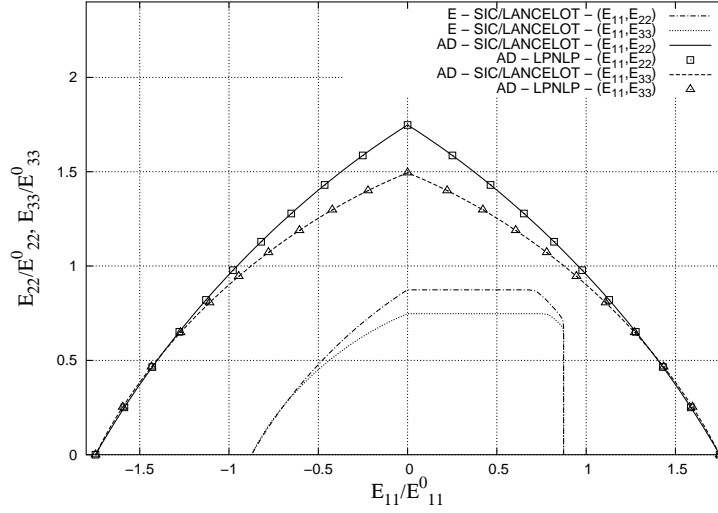


FIGURE V.6 – Matériau stratifié calculé dans les plans  $(E_{11}, E_{22})$  et  $(E_{11}, E_{33})$ :  $E$  - Enveloppe d'élasticité,  $AD$  - Enveloppe d'adaptation

$(E_{11}, E_{13})$  conduisent tous les deux à des coefficients de charge à l'adaptation vérifiant :

$$\alpha^{SD} = 2 \alpha^E \quad \text{pour toute direction de chargements entre } 0^\circ \text{ et } 180^\circ \quad (\text{V.7})$$

Les mêmes conclusions restent valables pour le plan  $(E_{11}, E_{23})$ , puisque les enveloppes d'élas-

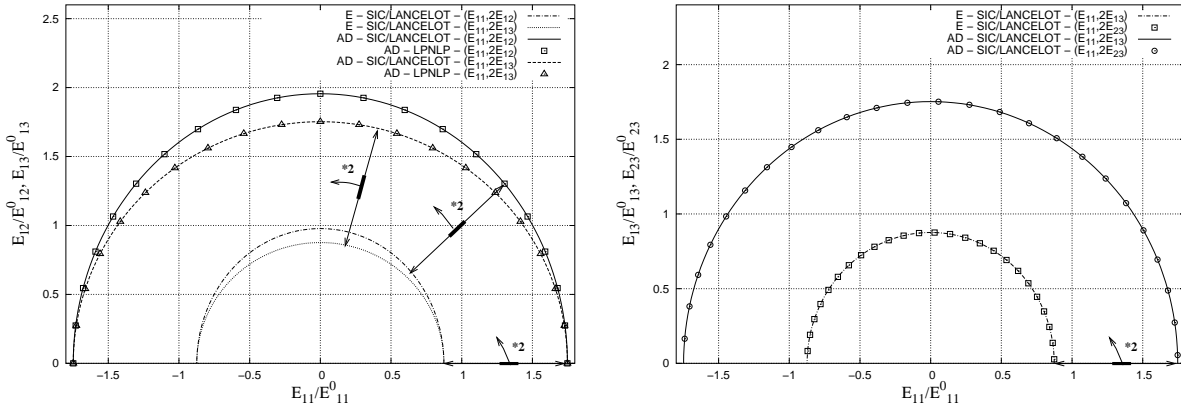


FIGURE V.7 – Matériau stratifié calculé dans les plans  $(E_{11}, E_{12})$ ,  $(E_{11}, E_{13})$  et  $(E_{11}, E_{23})$ :  $E$  - Enveloppe d'élasticité,  $AD$  - Enveloppe d'adaptation

té et d'adaptation sont identiques<sup>9</sup> dans les plans  $(E_{11}, E_{13})$  et  $(E_{11}, E_{23})$ . D'autre part, la concordance des résultats de ces deux dernières figures avec ceux obtenus par LPNLP continue de valider la méthode. Plus généralement, les enveloppes d'adaptation ont été validées, par

9. Afin de ne pas rendre la figure illisible, seuls quelques points des enveloppes obtenues pour le plan  $(E_{11}, E_{23})$  ont été représentés sur la figure V.7. On précise cependant que les calculs ont également été effectués en prenant pour  $\delta$  et  $r$  les valeurs définies par (V.1).

comparaison avec les enveloppes d'adaptation obtenues par les développements de MAGOARIEC (2000) et HACHEMI *et al.* (2001), pour de nombreuses combinaisons de chargements, dont seules quelques unes sont présentées ici. Ces comparaisons nous permettent donc d'affirmer l'aptitude de la méthode numérique développée à fournir des enveloppes d'adaptation correctes.

### V.1.3.c Domaines macroscopiques à contrainte imposée

Le paragraphe précédent ayant permis de valider les enveloppes d'adaptation, on s'attache ici à la validation des domaines d'analyse limite. Les simulations suivantes sont donc effectuées pour des plans de chargements en contrainte, autorisant l'obtention de domaines d'analyse limite, ce qui n'était pas réaliste à déformation imposée, comme évoqué au paragraphe III.5. La remarque du paragraphe précédent, concernant le nombre de points de charge utilisés pour rechercher les coefficients de charge élastiques, reste valable. De même, l'équivalence des directions 1 et 2, mise en relief sur l'exemple de chargements dans les plans  $(E_{11}, E_{33})$  et  $(E_{22}, E_{33})$ , se retrouverait dans les plans  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{33})$  et  $(\Sigma_{22}, \Sigma_{33})$ .

#### ■ Validation du domaine d'analyse limite

La fiabilité de la méthode développée étant assurée par les simulations du paragraphe précédent, et ce, quel que soit le plan et la direction de sollicitations, on ne présente la validation du domaine d'analyse limite que sur deux cas de chargements : les plans  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$  et  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{33})$ . En ce sens, la figure V.8 propose des comparaisons entre les domaines d'analyse limite obtenus de trois façons

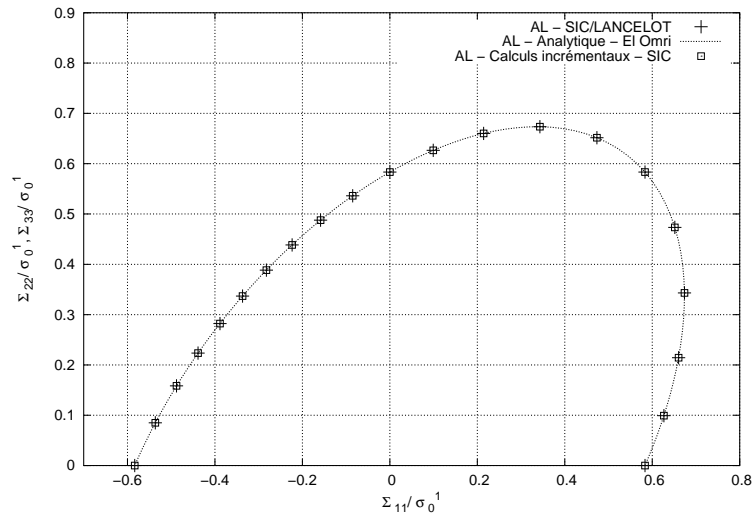


FIGURE V.8 – Matériau stratifié calculé dans les plans  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$  et  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{33})$  : AL - Analyse limite

différentes :

- analytiquement, par application des formules issues de travaux de EL OMRI *et al.* (2000),

qui fournissent les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{1}{6} (\Sigma_{11} + \Sigma_{22})^2 + \frac{1}{2} (\Sigma_{11} - \Sigma_{22})^2 - \left[ \frac{1}{(e^1 + e^2)} \left( e^1 \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0^1 + e^2 \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0^2 \right) \right]^2 = 0 \\ \frac{1}{6} (\Sigma_{11} + \Sigma_{33})^2 + \frac{1}{2} (\Sigma_{11} - \Sigma_{33})^2 - \left[ \frac{1}{(e^1 + e^2)} \left( e^1 \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0^1 + e^2 \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0^2 \right) \right]^2 = 0 \end{cases} \quad (V.8)$$

- numériquement par une méthode incrémentale, développée par BOURGEOIS (1997), suivant le trajet de chargements défini sur la figure I.3,
- et enfin, numériquement par la méthode directe implémentée ici.

Ces simulations permettent, non seulement de valider notre méthode dans le cas de l'analyse limite, mais également de mettre en lumière un fait remarquable : les domaines d'analyse limite sont identiques que l'on travaille dans le plan  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$  ou dans le plan  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{33})$ , ce qui n'est pas, *a priori*, évident.

#### ■ Comparaisons entre certaines capacités de résistance

On représente sur la figure V.9 l'ensemble des domaines et enveloppes relatifs à ces deux derniers plans de chargements. Contrairement au cas des sollicitations en déformation, la différence entre

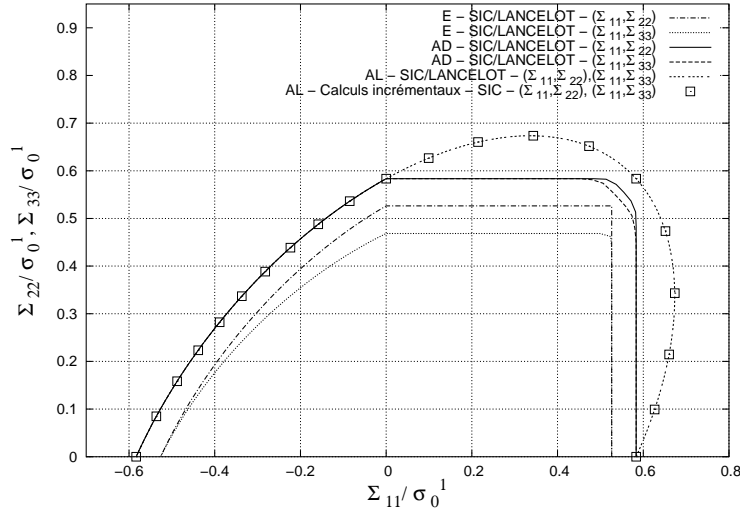


FIGURE V.9 – Matériau stratifié calculé dans les plans  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$  et  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{33})$  : *E* - Enveloppe d'élasticité, *AD* - Enveloppe d'adaptation, *AL* - Domaine d'analyse limite

les capacités de résistance dans les plans  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$  et  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{33})$  n'est pas flagrante. Comme évoqué ci-avant, le résultat le plus étonnant concerne les domaines d'analyse limite, qui sont exactement identiques dans les deux plans de chargements. Concernant les études d'élasticité et d'adaptation, le matériau est effectivement plus résistant dans le plan  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ , mais sur des plages bien plus réduites que celles définies par (V.5), en particulier pour les enveloppes d'adaptation. En effet, les directions pour lesquelles les possibilités de chargements sont plus

élevées dans le plan  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$  que dans le plan  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{33})$  sont les suivantes :

$$\begin{cases} 41.4^\circ \leq r \delta \leq 176.4^\circ & \text{pour l'élasticité} \\ 39.6^\circ \leq r \delta \leq 48.6^\circ & \text{pour l'adaptation} \end{cases} \quad (\text{V.9})$$

On remarquera également la bonne coïncidence des résultats obtenus par la méthode directe avec ceux obtenus par la méthode incrémentale.

Cette faible distinction entre les enveloppes d'adaptation n'est cependant pas représentative du comportement du stratifié à contrainte imposée. En effet, comme le montre la figure V.10, ces enveloppes dans les plans d'étude  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{12})$  et  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{13})$  (ou encore dans les plans  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{12})$  et  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{23})$ ) sont effectivement distinctes pour de nombreuses directions. On retrouve également,

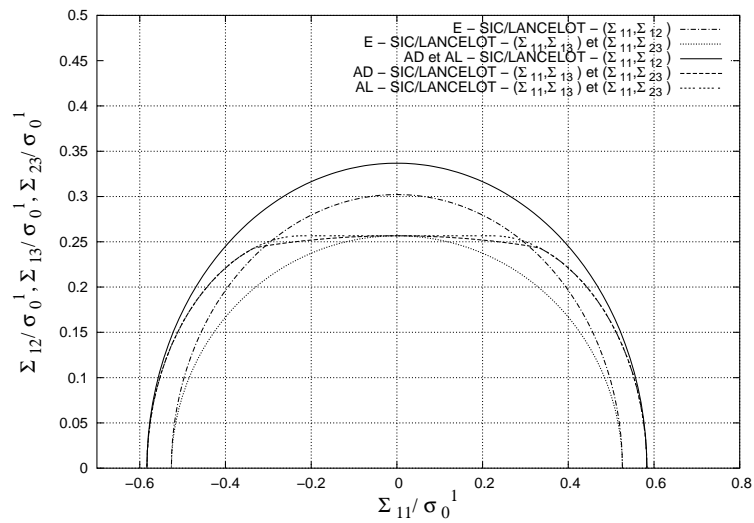


FIGURE V.10 – Matériau stratifié calculé dans les plans  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{12})$ ,  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{13})$  et  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{23})$  : *E* - Enveloppe d'élasticité, *AD* - Enveloppe d'adaptation, *AL* - Domaine d'analyse limite

sur cette figure, le fait que le matériau se comporte de la même façon dans les plans  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{13})$  et  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{23})$ . D'autre part, l'égalité des coefficients de charge vis-à-vis des trois types d'analyses lorsque seul  $\Sigma_{13}$  (ou  $\Sigma_{23}$ ) est imposé non nul, s'explique par le fait que les composantes  $\sigma_{i3}$  sont constantes dans la cellule de base, comme le montre la relation (III.30). En effet, dès que l'une des couches plastifie, un processus de ruine est enclenché, sans observer d'écrouissage structurel.

#### ■ Lecture des graphes résultats

On revient enfin sur la différence entre les notions de domaine et d'enveloppe de résistance, qui sont d'importance lors de la lecture des graphes proposés. En effet, si les domaines d'analyse limite s'interprètent classiquement<sup>10</sup>, il n'en va pas de même pour les enveloppes d'adaptation.

10. On rappelle (voir figure I.2) que tout trajet de chargements, quelconque à l'intérieur du domaine d'élasticité, proportionnel entre l'enveloppe d'élasticité et le domaine d'analyse limite et dont le prolongement passe par l'origine, est susceptible d'entraîner un phénomène de ruine plastique du matériau.

La nature polyédrique des domaines de chargements initiaux implique une lecture atypique des domaines et enveloppes finaux : seuls les trajets de chargements pouvant être inclus dans un rectangle du type de ceux de la figure V.2, c'est-à-dire avec l'un de ses sommets à l'origine et le sommet opposé sur l'enveloppe d'adaptation, conduisent à l'adaptation du matériau. A titre d'exemple, on représente sur la figure V.11, proposant les enveloppes d'adaptation dans le plan de chargements  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ , deux trajets de chargements  $\mathfrak{L}_1$  et  $\mathfrak{L}_2$ , tous deux inclus dans la surface engendrée par l'enveloppe d'adaptation. Les conclusions relatives à la réponse adaptée, ou non,

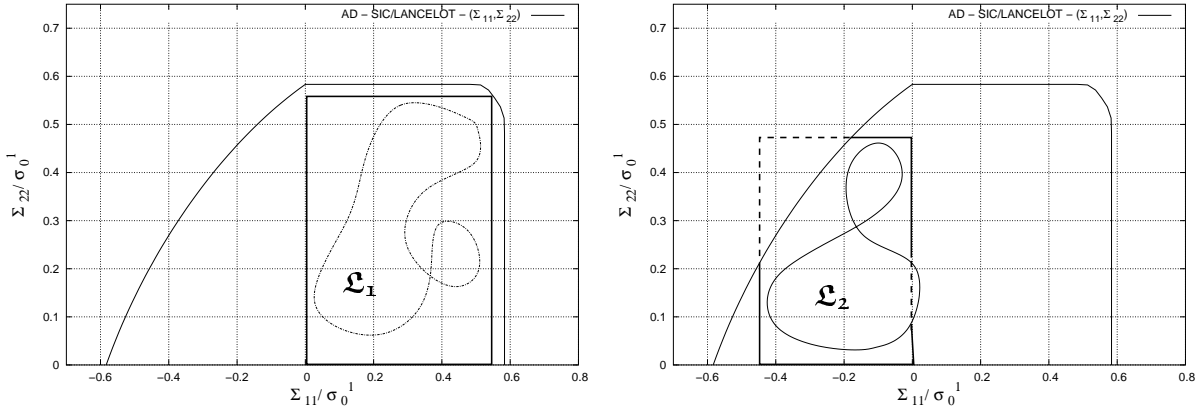


FIGURE V.11 – *Exploitation de l'enveloppe d'adaptation (AD) du matériau stratifié calculé dans le plan  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$*

du matériau sous ces chargements, sont les suivantes :

- le trajet  $\mathfrak{L}_1$  induit assurément l'adaptation du matériau, car il peut être inclus dans un rectangle homothétique des rectangles initiaux, c'est-à-dire dont le point de charge  $P_2$  est confondu avec l'origine et le point de charge  $P_1$  est un point de l'enveloppe d'adaptation,
- par contre, le trajet  $\mathfrak{L}_2$  n'étant pas inscriptible dans un tel rectangle, il nous est impossible de conclure quant-à l'adaptation, ou la non adaptation, du matériau sous ce trajet.

Les mêmes conclusions valent pour l'enveloppe d'élasticité, obtenue à partir des mêmes points de charge que l'enveloppe d'adaptation. Cependant, la linéarité de la solution élastique assure que tout trajet de chargements inclus dans l'enveloppe d'élasticité conduit à un comportement purement élastique, et donc fiable, du matériau.

#### V.1.4 Simulations numériques par l'approche cinématique et réflexions

Ce paragraphe s'intéresse désormais à l'étude de l'adaptation du même stratifié, mais abordée d'un point de vue cinématique. Deux raisons principales motivent ce choix :

- premièrement, un souci de cohérence dans la démarche, qui consiste à utiliser le théorème cinématique de l'adaptation puisque la méthode de discrétisation choisie est une méthode en déplacements,

- deuxièmement, un souci de corroboration des résultats et de comparaison des temps de calculs entre les deux approches statique et cinématique.

On choisit de solliciter le stratifié dans le plan en contraintes  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ . Les simulations, réalisées en intégration réduite et dont les résultats sont présentés figure V.12, sont donc cette fois-ci basées sur la résolution du problème d'optimisation  $P_{cont}^{cin}$ , représentant le couplage "théorème (III.2) +  $P_{cont}^{(e),cl}$ " et possédant 396 variables d'optimisation et 161 contraintes d'égalités. Relativement aux

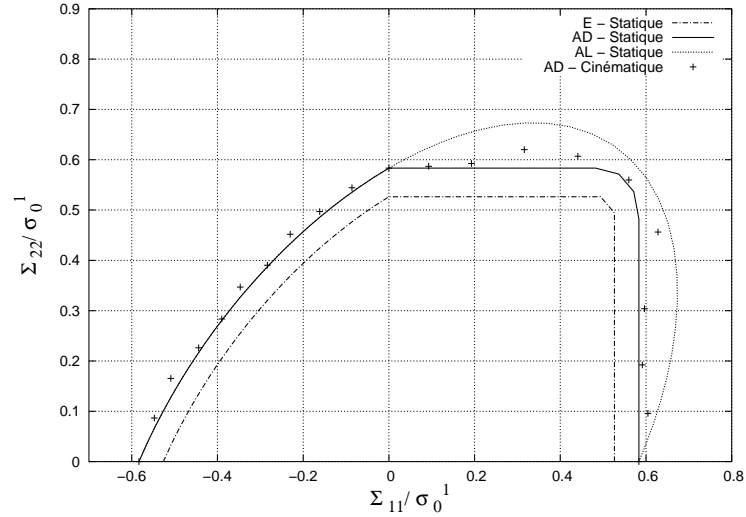


FIGURE V.12 – *Stratifié calculé dans le plan  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$  : comparaison entre les approches statique et cinématique*

objectifs premiers, ces simulations conduisent aux deux conclusions suivantes :

- on constate une assez bonne corrélation entre les deux approches pour des sollicitations dans le quart de plan  $(\Sigma_{11} \leq 0, \Sigma_{22} \geq 0)$ . Ceci est beaucoup plus mitigé dans le quart de plan  $(\Sigma_{11} \geq 0, \Sigma_{22} \geq 0)$ , où quelques points posent problème. En effet, la propriété de convexité de l'enveloppe finale d'adaptation et le fait que tout point inclus dans un rectangle de type  $\mathcal{D}_r$  appartienne au domaine d'adaptation, qui sont deux propriétés issues de la convexité du critère de VON-MISES et du principe même de construction des domaines finaux, ne sont pas satisfaits par les résultats de l'approche cinématique, alors qu'ils devraient l'être quelle que soit l'approche utilisée ;
- d'autre part, l'idée première que les temps de calculs se verraient diminués de par l'utilisation de l'approche cinématique, n'est pas confortée. En effet, le problème d'optimisation associé à l'approche cinématique ne présentant que des contraintes d'optimisation linéaires, il nous semblait, *a priori*, que les temps de calculs seraient moins prohibitifs que ceux de l'approche statique, pour laquelle les conditions d'optimisation liées à l'expression du critère de VON-MISES en chaque point de charge et en chaque point de GAUSS sont non linéaires. Ceci n'a pas été le cas *a posteriori*. L'approche cinématique faisant intervenir un nombre de variables d'optimisation beaucoup plus important que l'approche statique, il

semblerait donc que, pour un problème donné, LANCELOT soit plus apte à gérer les non linéarités que les grands nombres de variables d'optimisation.

Cette utilisation de la méthode cinématique n'a donc pas réellement retourné les résultats escomptés et nécessite encore quelques améliorations, en particulier au niveau de l'implémentation de la méthode dans le logiciel d'optimisation. En effet, la non différentiabilité de la fonction objectif en zéro est une singularité qui n'est pas traitée automatiquement par LANCELOT et qui nécessite donc –étant vraisemblablement la cause des problèmes évoqués ci-avant– une attention particulière.

## V.2 Etude d'une structure fine perforée, sollicitée en contrainte dans son plan

La méthode proposée ayant été validée, que ce soit vis-à-vis de l'adaptation ou de l'analyse limite, pour plusieurs plans de chargements, les applications présentées dans ce paragraphe seront uniquement issues de sollicitations dans le plan ( $\Sigma_{11}, \Sigma_{22}$ ). Cette deuxième application<sup>11</sup> concerne donc des cellules de base du deuxième type, représentatives de structures fines périodiquement perforées et sollicitées dans leur plan. Comme évoqué au chapitre I, on distingue ce cas du cas plus général traité au paragraphe suivant, afin de pouvoir comparer les résultats avec ceux de DÉBORDES *et al.* (1985), qui étudient, par une approche incrémentale et sous l'hypothèse des contraintes planes, le comportement limite de plaques d'aluminium perforées, sollicitées par des chargements plans biaxiaux.

### V.2.1 Présentation du problème tridimensionnel

On considère donc une plaque d'aluminium exhibant des propriétés de périodicité dans les deux directions de son plan. Cette périodicité provient de la perforation régulière de la plaque, selon un réseau carré, comme le montre la figure V.13. Les caractéristiques matérielles sont celles de l'aluminium sain, issues de l'expérience (DÉBORDES *et al.*, 1985). La plaque est sollicitée dans

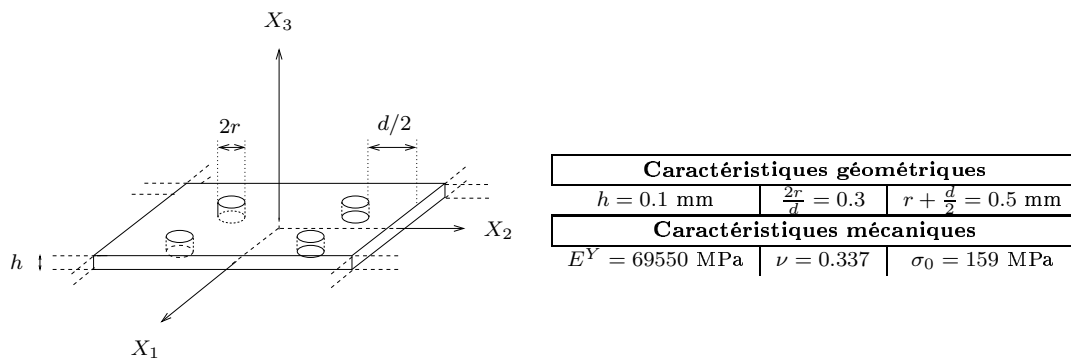


FIGURE V.13 – Plaque trouée : caractéristiques géométriques et mécaniques

son plan par un chargement en contraintes, tel celui de la figure V.2.

11. Cette application est également présentée dans MAGOARIEC *et al.* (2002).

### V.2.2 Choix de la cellule de base

La périodicité de la plaque incite à choisir comme cellule de base un échantillon de plaque ne comportant qu'une unique perforation. Cependant, les symétries de la plaque, tant géométriques que matérielles, associées au choix du plan de chargements  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ , autorisent à ne mener les calculs que sur le huitième de la cellule de base, ce qui permet de diminuer les temps CPU à précision égale. Le huitième de cellule, dont le maillage est représenté figure V.14, est discrétisé avec 48 éléments quadratiques en intégration réduite. Compte-tenu de la géométrie de la cellule

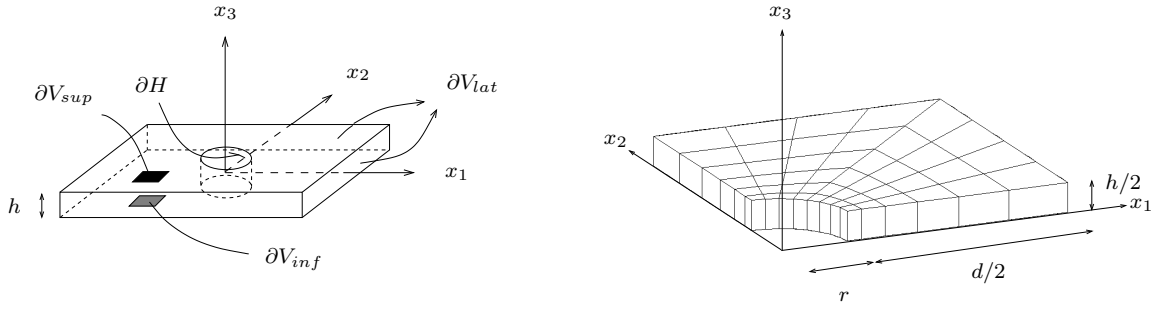


FIGURE V.14 – Cellule de base et maillage du huitième de la cellule de base

de base et de la nature du chargement imposé, le paragraphe I.3.4 nous indique que la cinématique sera de type (I.40) et que les problèmes cellulaires élastiques et aux contraintes résiduelles à considérer en vue de résoudre le problème d'optimisation  $P_{cont}^{stat}$ , sont respectivement  $P_{cont}^{(e),cav}$  et  $P_{cont}^{(r),cav}$ , pour lesquels les entités  $\partial V_{lat}$ ,  $\partial V_{sup}$ ,  $\partial V_{inf}$  et  $\partial H$  sont définies figure V.14.

Cependant, le fait de travailler sur le huitième de la cellule de base modifie quelque peu ces problèmes cellulaires. En effet, LÉNÉ (1984) montre que les conditions de périodicité sont alors remplacées par des conditions de nullité sur les restrictions des faces  $\partial V_{lat}$ ,  $\partial V_{sup}$  et  $\partial V_{moy}$ <sup>12</sup> au huitième de la cellule de base, respectivement notées  $\partial V_{lat}^{1/8}$ ,  $\partial V_{sup}^{1/8}$  et  $\partial V_{moy}^{1/8}$ . Les problèmes  $P_{cont}^{(e),cav}$  et  $P_{cont}^{(r),cav}$  deviennent donc, une fois exprimés sur le huitième de la cellule de base :

12.  $\partial V_{moy}$  est défini comme étant le bord d'altitude zéro parallèle à  $\partial V_{sup}$ .



Approche contrainte: $P_{cont}^{(e),cav}$	Approche contrainte: $P_{cont}^{(r),cav}$
$(\tilde{\Sigma}_{11}, \tilde{\Sigma}_{22})$ données Trouver $\mathbf{u}^{pér,(e)}$ , et $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$ t.q.:	Trouver $\boldsymbol{\rho}$ t.q.:
$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{0} \text{ dans } V^{*1/8} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{d} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \left( \left\langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)} \right\rangle_{V^{1/8}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^{pér,(e)} \right) \\ \mathbf{u}^{pér,(e)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial V_{lat}^{1/8} \cup \partial V_{moy}^{1/8} \\ \left\langle \tilde{\varepsilon}_{12}^{(e)} \right\rangle_{V^{1/8}} = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(e)}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial V_{lat}^{1/8} \cup \partial V_{moy}^{1/8} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial H^{1/8} \cup \partial V_{sup}^{1/8} \\ \left\langle \tilde{\sigma}_{11}^{(e)} \right\rangle_{V^{1/8}} = \tilde{\Sigma}_{11}; \left\langle \tilde{\sigma}_{22}^{(e)} \right\rangle_{V^{1/8}} = \tilde{\Sigma}_{22} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0} \text{ dans } V^{*1/8} \\ \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial V_{lat}^{1/8} \cup \partial V_{moy}^{1/8} \\ \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial H^{1/8} \cup \partial V_{sup}^{1/8} \\ \left\langle \tilde{\rho}_{11} \right\rangle_{V^{1/8}} = \left\langle \tilde{\rho}_{22} \right\rangle_{V^{1/8}} = \mathbf{0} \end{array} \right.$

ce qui est très avantageux au niveau numérique.

Les nombres de variables d'optimisation, de contraintes d'inégalités et d'égalités associés au problème d'adaptation posé sur le huitième de cellule sont respectivement égaux à 2305, 1536 et 944. Enfin, les simulations sont réalisées pour des valeurs de  $p$  et  $\delta$  respectivement fixées à 41 et  $4.5^\circ$ .

### V.2.3 Tracé des différents domaines de résistance macroscopiques

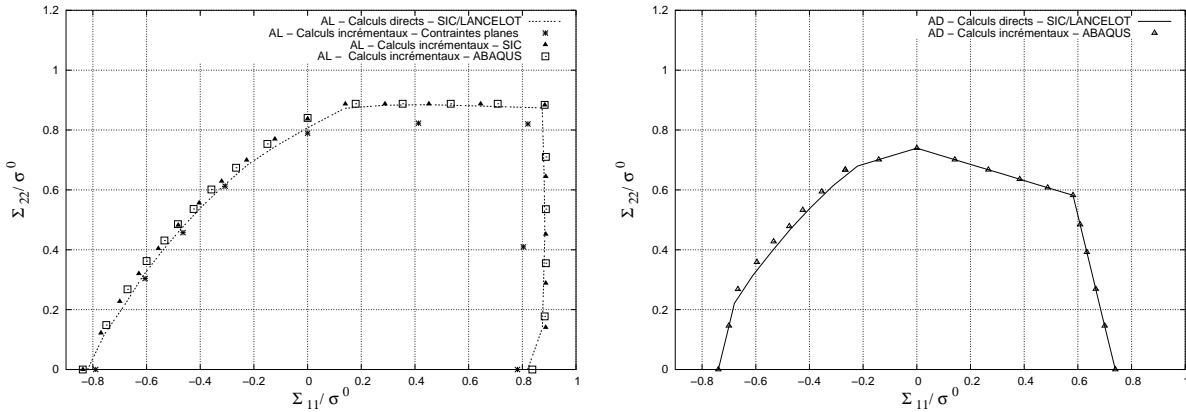


FIGURE V.15 – Plaque perforée calculée dans le plan  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$  : détail des validations du domaine d'analyse limite et de l'enveloppe d'adaptation

Le coefficient de porosité étant fixé à 0.04 par les valeurs définies figure V.13, on s'inté-

resse à déterminer les capacités de résistance de la plaque dans le plan  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ , et à analyser, par comparaison avec les résultats de DÉBORDES *et al.* (1985), l'influence de l'hypothèse de contraintes planes sur le domaine d'analyse limite. Les résultats, détaillés figure V.15, sont résumés figure V.16.

Le premier graphe de la figure V.15 met en évidence un certain décalage entre le domaine de DÉBORDES *et al.* et le nôtre. Il semblerait que la différence soit justement à attribuer à l'hypothèse des contraintes planes. En effet, cette hypothèse implique la relation suivante :

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_3 = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in V^{*1/8} \quad (\text{V.10})$$

alors que nous imposons uniquement une condition de traction libre sur la face supérieure de la cellule de base :

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_3 = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \partial V_{sup}^{*1/8} \quad (\text{V.11})$$

Par conséquent, l'optimisation est dans notre cas réalisée dans un espace plus large que celui défini par (V.10), d'où l'écart observable entre les deux domaines sur la figure (V.15). Cette comparaison ne permettant que de conclure à une validation qualitative de nos résultats (le domaine de DÉBORDES *et al.* (1985) est bien inclus dans le nôtre, comme l'implique l'hypothèse des contraintes planes), on réalise une deuxième série de validations, basée sur une approche incrémentale utilisant, sous SIC puis sous ABAQUS, le trajet de chargement  $\mathcal{P}'$  de la figure I.3. La coïncidence des résultats finit alors de valider notre approche.

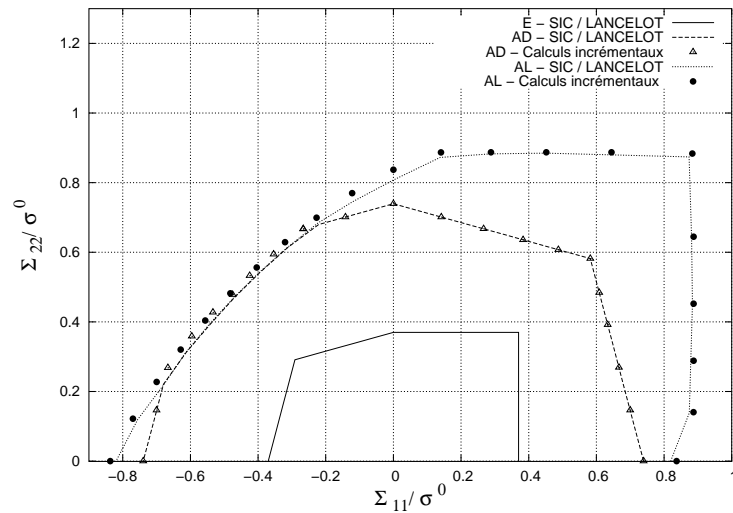


FIGURE V.16 – Plaque perforée calculée dans le plan  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$  : *E* - Enveloppe d'élasticité, *AD* - Enveloppe d'adaptation, *AL* - Domaine d'analyse limite

L'enveloppe d'adaptation est quant-à-elle comparée avec l'enveloppe obtenue sous ABAQUS, par une méthode incrémentale, pour laquelle le critère utilisé pour déterminer l'incrément de passage

à l'adaptation est un critère énergétique : on considère que la cellule s'adapte dès que l'énergie dissipée plastiquement par le modèle cesse d'évoluer, comme le montre la figure II.16.

La figure V.16 regroupe ces constatations en distinguant uniquement la méthode directe de la méthode incrémentale.

### V.3 Etude de plaques périodiques hétérogènes en membrane et en flexion

Ce paragraphe, pouvant être vu comme une généralisation du paragraphe précédent, s'intéresse aux structures de type plaques périodiques sollicitées en membrane et/ou en flexion, c'est-à-dire au troisième type de cellule de base. Allant dans le sens croissant des difficultés, le premier exemple concerne une plaque homogène, le second une plaque périodique dans une des directions de l'espace du fait de renforts verticaux, et le dernier considère une plaque trouée soumise, cette fois-ci, à des sollicitations non uniquement planes. Pour fixer les idées, on choisit de soumettre ces plaques au chargement  $(N_{11}, M_{11})$ . De plus, les problèmes étant abordés par l'approche statique de l'adaptation, chacun de ces trois cas mène à résoudre le problème d'optimisation  $P_{cont}^{stat}$ , dont les données sont issues de la résolution des problèmes cellulaires  $P_{cont}^{(e),plq}$  et  $P_{cont}^{(r),plq}$ , pour lesquels la cinématique est de type (III.15). Toutes les simulations<sup>13</sup> de ce paragraphe sont réalisées pour  $p = 31$  et  $\delta = 6^\circ$ .

#### V.3.1 Etude d'une plaque homogène

On considère en premier lieu une plaque homogène, d'épaisseur constante  $e$  selon la direction 3, pour laquelle il est possible de valider analytiquement l'enveloppe d'élasticité et le domaine d'analyse limite. L'invariance des propriétés dans les directions 1 et 2 autorise à choisir une cellule de base parallélépipédique, que l'on particularise arbitrairement en une cellule cubique. La figure V.17 présente les caractéristiques de la cellule ainsi que le maillage utilisé, composé

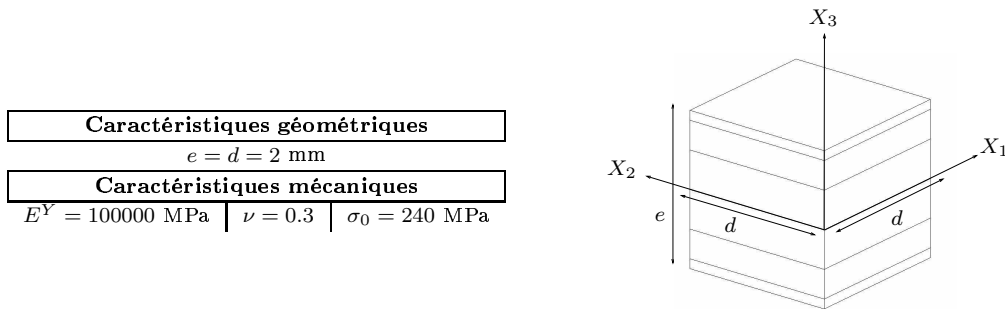


FIGURE V.17 – *Plaque homogène : caractéristiques géométriques et mécaniques de la cellule de base*

13. Ces simulations ont fait l'objet de la communication de MAGOARIEC *et al.* (2003b).

de six éléments quadratiques H20 en intégration exacte. Comme pour le stratifié étudié au paragraphe V.1, les propriétés d'invariance dans les directions 1 et 2 autorisent à ne considérer qu'un seul élément dans ces directions. Le raffinement vers les peaux supérieure et inférieure est étudié afin de rendre correctement compte du phénomène de plastification première des peaux. On présente figure V.18 deux types simulations : l'une pour un maillage tel celui de la figure V.17, comportant donc six H20, et l'autre pour le même type de maillage, mais ne comportant que quatre H20. Les résultats montrent que l'utilisation de six H20 dans l'épaisseur suffit pour approcher convenablement l'enveloppe d'élasticité, dont une expression analytique dans le quart<sup>14</sup> de plan ( $N_{11} \geq 0, M_{11} \geq 0$ ) est obtenue par combinaison des relations définissant les contraintes généralisées et de la cinématique choisie :

$$\frac{M_{11}}{M^0} - \frac{e}{6} \frac{N_{11}}{N^0} - \frac{e}{6} \sigma_0 = 0 \quad (\text{V.12})$$

où les moment limite de flexion et contrainte limite de membrane sont définis par :

$$M^0 = \frac{e^2}{4} \sigma^0 \quad \text{et} \quad N^0 = e \sigma^0 \quad (\text{V.13})$$

On précise que dans le cas d'un maillage à six H20, le problème d'optimisation résolu pour

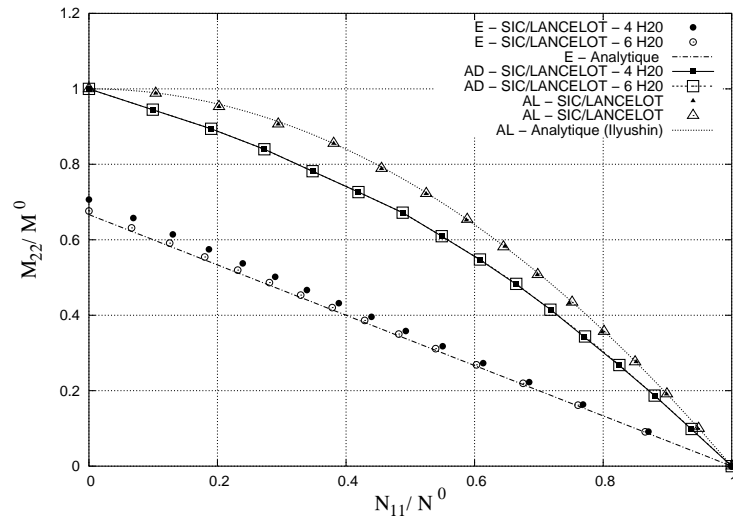


FIGURE V.18 – Plaque homogène calculée dans le plan  $(N_{11}, M_{11})$  : *E* - Enveloppe d'élasticité, *AD* - Enveloppe d'adaptation, *AL* - Domaine d'analyse limite

déterminer le coefficient de charge à l'adaptation pour chacune des 31 directions possède 973 variables d'optimisation, 648 contraintes d'inégalités et 87 contraintes d'égalités.

#### REMARQUE V.1

Le calcul analytique conduit à la détermination du domaine d'élasticité classique. Le fait que le domaine analytique coïncide avec l'enveloppe numérique implique donc que, dans le cas de la

<sup>14</sup>. Les résultats des simulations numériques ne sont donnés que dans le quart de plan ( $N_{11} \geq 0, M_{11} \geq 0$ ) du fait de la symétrie du critère de VON-MISES par rapport à l'origine et de la symétrie de la cellule de base par rapport au feuillet moyen.

plaque homogène, le domaine d'élasticité calculé à partir d'un unique point de charge correspond à l'enveloppe d'élasticité calculée à partir de quatre points de charge.  $\square$

*A priori*, il faudrait également raffiner le maillage de part et d'autre du feuillet moyen –défini, on le rappelle, par  $x_3 = 0$ – afin de représenter correctement la plastification totale de la cellule. Cependant, les résultats de la figure V.18 montrent *a fortiori* que ceci n'est pas nécessaire dans ce cas. En effet, le domaine d'analyse limite obtenu coïncide parfaitement avec le domaine d'analyse limite analytique, issu des travaux de ILYUSHIN (1956) et HODGE (1959), dont l'expression est donnée dans le quart de plan ( $N_{11} \geq 0, M_{11} \geq 0$ ) par :

$$\frac{M_{11}}{M^0} + \left[ \frac{N_{11}}{N^0} \right]^2 - 1 = 0 \quad (\text{V.14})$$

### V.3.2 Etude d'une plaque renforcée 1D-périodique

On s'intéresse désormais à un autre type de plaque périodique : une structure formée par deux plaques planes horizontales et raidie par des renforts verticaux, dont les propriétés sont données figure V.19. Cette figure propose également les caractéristiques de la cellule de base qui, de par la

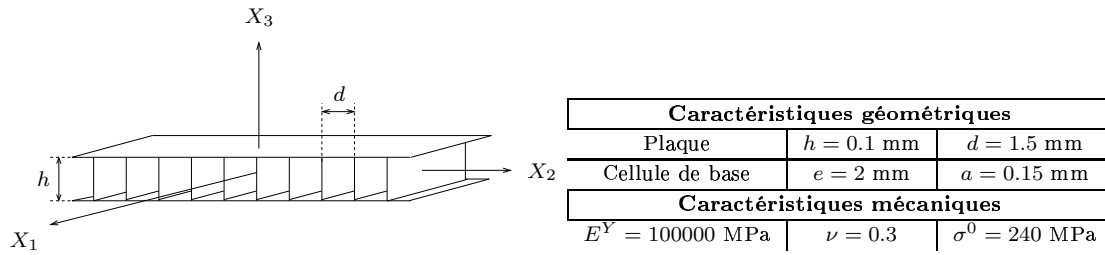


FIGURE V.19 – Plaque 1D-périodique : caractéristiques géométriques et mécaniques

géométrie même de la structure se réduit à un I. Cette cellule est maillée avec 22 éléments H20 en intégration exacte. L'invariance dans la direction 2 autorise à ne considérer qu'un élément selon  $x_2$ . Le maillage est plus raffiné autour du feuillet moyen, afin de bien représenter la plastification totale de la cellule (figure V.20). Le domaine élastique à un point de charge correspond ici encore

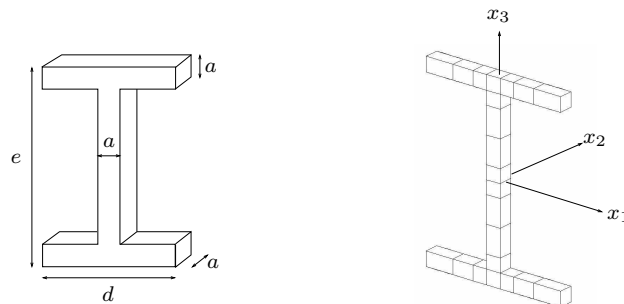


FIGURE V.20 – Cellule de base et maillage de la cellule de base

à l'enveloppe des domaines élastiques à quatre points de charge. En effet, on constate sur les résultats donnés figure V.21, une faible différence entre l'enveloppe d'élasticité obtenue et celle donnée analytiquement par :

$$\frac{M_{11}}{M^0} + \frac{2}{e} \frac{g(a,d,e)}{f(a,d,e)} \frac{N_{11}}{N^0} - \frac{2}{e} g(a,d,e) \sigma^0 = 0 \quad (\text{V.15})$$

où  $g$ ,  $f$ ,  $N^0$  et  $M^0$  sont, encore une fois, dérivées des formules de la théorie des plaques :

$$\begin{cases} g(a,d,e) = -\frac{2}{3} \frac{a^3}{b} (a-b) + ae \left( \frac{a^2}{b} - \frac{ae}{2b} - a - \frac{e^2}{12b} + \frac{e}{2} \right) \\ f(a,d,e) = \frac{1}{b} [2ab + a(e-2a)] \\ N^0 = \frac{a}{d} [e + 2(d-a)] \sigma^0 \\ M^0 = \frac{a}{d} \left[ \frac{e^2}{4} + (d-a)(e-a) \right] \sigma^0 \end{cases} \quad (\text{V.16})$$

On précise que, concernant l'analyse à l'adaptation, ce maillage conduit à considérer un problème

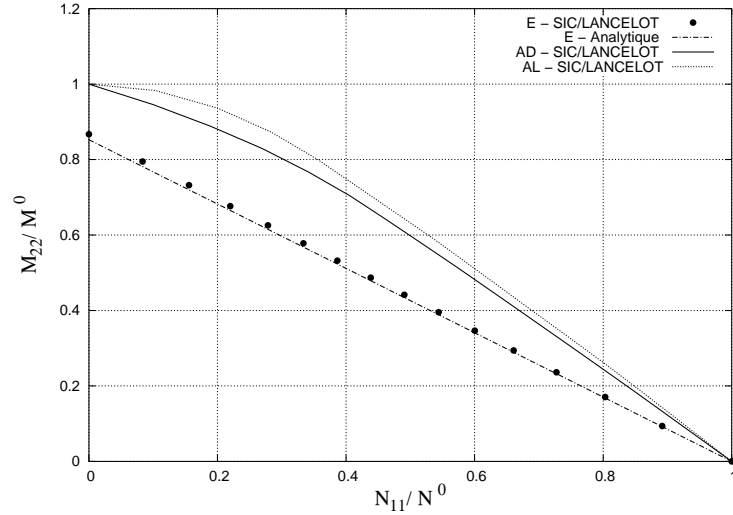


FIGURE V.21 – *Plaque renforcée calculée dans le plan  $(N_{11}, M_{11})$  : E - Enveloppe d'élasticité, AD - Enveloppe d'adaptation, AL - Domaine d'analyse limite*

d'optimisation à 3565 variables d'optimisation, 2376 contraintes d'inégalités et 453 contraintes d'égalités.

### V.3.3 Etude d'une plaque trouée 2D-périodique

Enfin, on étudie la même plaque qu'au paragraphe V.2, à ceci près que son épaisseur  $h$  vaut désormais 0.2 mm et qu'elle est sollicitée dans le plan  $(N_{11}, M_{11})$ . Les caractéristiques géométriques et matérielles sont donc celles données par la figure V.13. Contrairement à la sollicitation dans le plan  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ , le chargement en flexion ne permet plus de travailler sur le huitième de la cellule de base. On se contente donc de travailler sur le quart, tel qu'il est défini

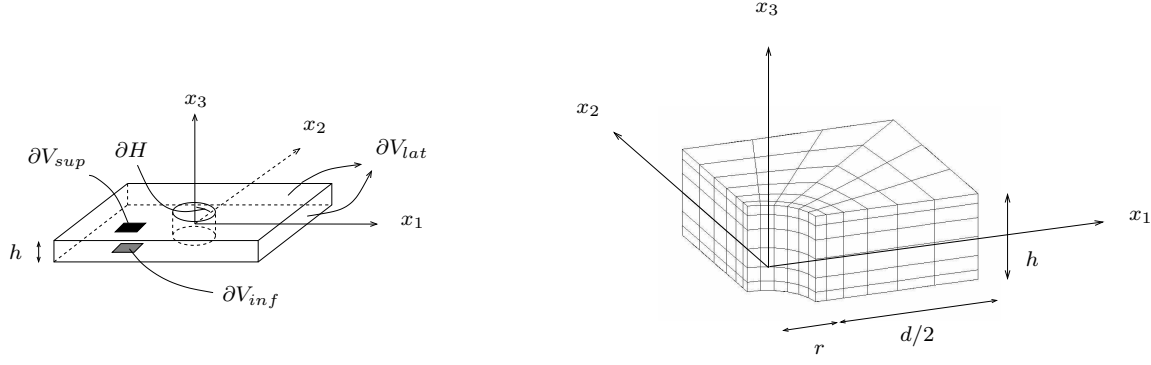


FIGURE V.22 – Cellule de base et maillage du quart de la cellule de base

figure V.22. Le maillage, constitué de 216 éléments H20 en intégration réduite, est raffiné vers les peaux. Comme évoqué en fin de paragraphe I.3, les problèmes cellulaires  $P_{cont}^{(e),plq}$  et  $P_{cont}^{(r),plq}$  sont issus d'un couplage entre  $P_{cont}^{(e),cav}$  et  $P_{cont}^{(e),plq}$  pour la partie purement élastique, et entre  $P_{cont}^{(r),cav}$  et  $P_{cont}^{(r),plq}$  pour la partie résiduelle. De plus, à la lumière des travaux de LÉNÉ (1984), le fait de ne travailler que sur le quart de la cellule implique également de légères modifications consistant, comme au paragraphe V.2, à transformer les conditions de périodicité en conditions de nullité sur certaines parties du bord. Par conséquent, ces problèmes deviennent :

Approche contrainte: $P_{cont}^{(e),cav,plq}$	Approche contrainte: $P_{cont}^{(r),cav,plq}$
$(N_{11}, M_{11})$ données Trouver $\mathbf{u}^{pér,(e)}$ , et $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$ t.q. :	Trouver $\boldsymbol{\rho}$ t.q. :
$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{0} \text{ dans } V^{*1/4} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{d} : (\mathbf{E} - x_3 \mathbf{K} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}(\mathbf{u}^{pér,(e)})) \\ \mathbf{u}^{pér,(e)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial V_{lat}^{1/4} \\ E_{i3} = E_{12} = K_{i3} = K_{12} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \\ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial V_{lat}^{1/4} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial H^{1/4} \cup \partial V_{sup}^{1/4} \cup \partial V_{inf}^{1/4} \\ \langle \sigma_{11}^{(e)} \rangle_{V^{1/4}} = N_{11} \\ \langle \sigma_{22}^{(e)} \rangle_{V^{1/4}} = N_{22} \\ \langle -x_3 \sigma_{11}^{(e)} \rangle_{V^{1/4}} = M_{11} \\ \langle -x_3 \sigma_{22}^{(e)} \rangle_{V^{1/4}} = M_{22} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div} \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0} \text{ dans } V^{*1/4} \\ \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial V_{lat}^{1/4} \\ \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial H^{1/4} \cup \partial V_{sup}^{1/4} \cup \partial V_{inf}^{1/4} \\ \langle \rho_{11} \rangle_{V^{1/4}} = \langle \rho_{22} \rangle_{V^{1/4}} = 0 \\ \langle -x_3 \rho_{11} \rangle_{V^{1/4}} = \langle -x_3 \rho_{22} \rangle_{V^{1/4}} = 0 \end{array} \right.$

où  $V^{*1/4}$ ,  $\partial V_{lat}^{1/4}$ ,  $\partial V_{sup}^{1/4}$  et  $\partial V_{inf}^{1/4}$  désignent respectivement les restrictions de  $V^*$ ,  $\partial V_{lat}$ ,  $\partial V_{sup}$  et  $\partial V_{inf}$  au quart de la cellule de base et où l'opérateur moyenne est défini comme suit :

$$\langle \sigma \rangle_{V^{1/4}} = \frac{1}{|V^{1/4}|} \int_{V^{1/4}} \sigma \, dV \quad (V.17)$$

Toujours à titre indicatif, le problème d'optimisation, associé à l'analyse d'adaptation posée sur ce quart de cellule, comporte 10369 variables d'optimisation, 6912 contraintes d'inégalités et 3267 contraintes d'égalités. La figure V.23 présente les résultats des simulations numériques. Les contraintes limites de membrane et de flexion,  $N^0$  et  $M^0$ , sont évaluées numériquement à 26.3742 N.mm<sup>-1</sup> et 1.3775 N. On retrouve ici le fait que l'enveloppe d'adaptation soit égale à deux fois

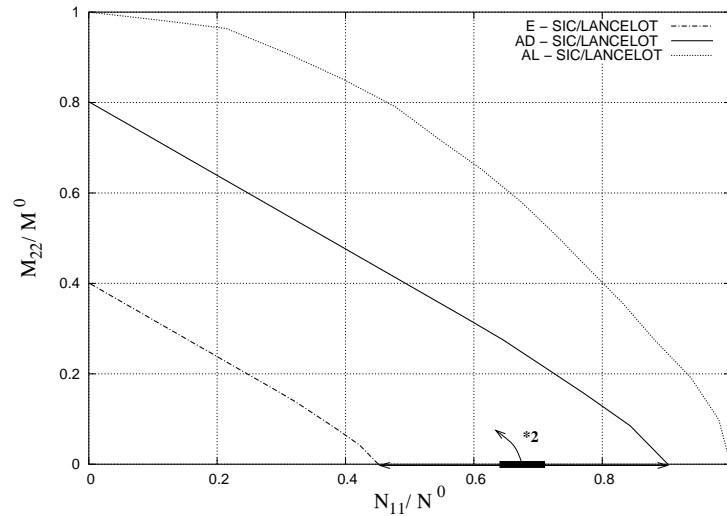


FIGURE V.23 – Plaque trouée calculée dans le plan  $(N_{11}, M_{11})$  : *E* - Enveloppe d'élasticité, *AD* - Enveloppe d'adaptation, *AL* - Domaine d'analyse limite

l'enveloppe d'élasticité quelles que soient les directions de chargements.

## V.4 Etude d'un matériau 3D-périodique à inclusions sphériques

Enfin, ce dernier paragraphe se ré-intéresse au cas des cellules de base dites de type classique en vue d'étudier<sup>15</sup>, toujours par l'approche statique, les capacités de résistance d'un matériau dont la microstructure est réellement tridimensionnelle, en ce sens qu'elle présente des périodicités dans les trois directions de l'espace.

### V.4.1 Présentation du problème tridimensionnel

Ce matériau est constitué d'une matrice ( $M$ ) élastoplastique homogène renforcée par des inclusions ( $I$ ) sphériques et élastiques, régulièrement réparties selon un arrangement carré. Comme

<sup>15</sup>. Cette étude a été réalisée dans le cadre d'une publication : MAGOARIEC *et al.* (acceptée pour publication le 23 juillet 2003).



le montre la figure V.24, les inclusions sont de rayon  $r$  et la distance entre les centres de deux inclusions voisines est notée  $a$ . D'autre part, le caractère élastique des inclusions est modélisé à

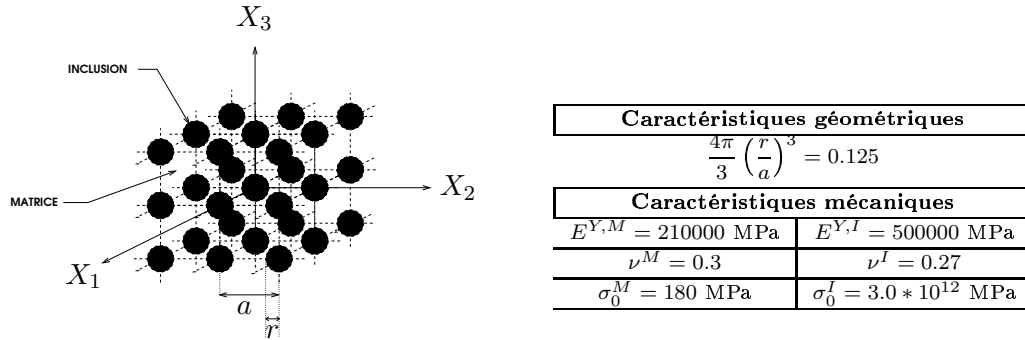


FIGURE V.24 – Matériau élastoplastique à inclusion sphériques et caractéristiques associées

l'aide d'inclusions élastoplastiques possédant une très grande limite élastique.

#### V.4.2 Choix, maillage et chargement de la cellule de base

Les propriétés du matériau conduisent à choisir une cellule de base de type classique. Du fait de la disposition des inclusions en réseau carré, le motif minimal représentatif du matériau est un parallélépipède comportant une unique inclusion entourée de matrice, dont le huitième est représenté figure V.25. Cette cellule de base est alors sollicitée dans le plan  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ . La cinématique est de type (I.40), le problème de localisation élastique de type  $P_{cont}^{(e)}$  et le problème aux contraintes résiduelles de type  $P_{cont}^{(r)}$ . Les propriétés de symétrie géométrique et matérielle, associées au type de chargement imposé, autorise également à ne mener les calculs que sur un huitième de la cellule de base, tout comme pour la plaque étudiée au paragraphe V.2. Pour ce faire, on utilise le maillage présenté figure V.25 : le huitième de cellule est maillé avec 400 éléments quadratiques H20, en intégration réduite. Une fois de plus, le fait de ne travailler que sur

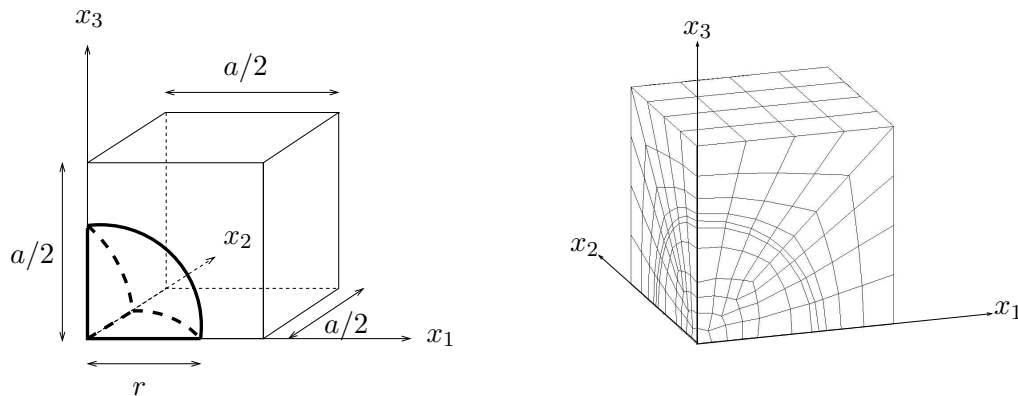


FIGURE V.25 – Maillage du huitième de la cellule de base

le huitième de la cellule de base, permet de remplacer toute condition de périodicité par une condition de nullité, ce qui est appréciable en terme de coût de calculs. Les problèmes cellulaires

associés à ces conditions de nullité sont alors :

Approche contrainte: $P_{cont}^{(e),cl}$	Approche contrainte: $P_{cont}^{(e),cl}$
$(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ données Trouver $\mathbf{u}^{pér,(e)}$ , et $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$ t.q.:	Trouver $\boldsymbol{\rho}$ t.q.:
$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{0} \text{ dans } V^{1/8} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{d} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} (\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \rangle_{V^{1/8}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^{pér,(e)}) \\ \mathbf{u}^{pér,(e)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial V^{1/8} \\ \langle \varepsilon_{ij}^{(e)} \rangle_{V^{1/8}} = 0 \quad i \neq j \quad (i,j) \in (1,2,3)^2 \\ \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(e)}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial V^{1/8} \\ \langle \sigma_{11}^{(e)} \rangle_{V^{1/8}} = \Sigma_{11}, \quad \langle \sigma_{22}^{(e)} \rangle_{V^{1/8}} = \Sigma_{22} \\ \langle \sigma_{33}^{(e)} \rangle_{V^{1/8}} = 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div} \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0} \text{ dans } V^{1/8} \\ \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial V^{1/8} \\ \langle \rho_{11} \rangle_{V^{1/8}} = \langle \rho_{22} \rangle_{V^{1/8}} = 0 \\ \langle \rho_{33} \rangle_{V^{1/8}} = 0 \end{array} \right.$

où, une fois encore,  $V^{1/8}$  et  $\partial V^{1/8}$  sont les restrictions de  $V$  et  $\partial V$  au huitième de la cellule de base.

### V.4.3 Domaines macroscopiques à contrainte imposée

Du fait de la discrétisation choisie, la taille des problèmes d'optimisation est encore augmentée : le problème d'adaptation, par exemple, comporte 19201 variables d'optimisation, 12800 contraintes d'inégalités et 5172 contraintes d'égalités. Afin de travailler avec des temps CPU

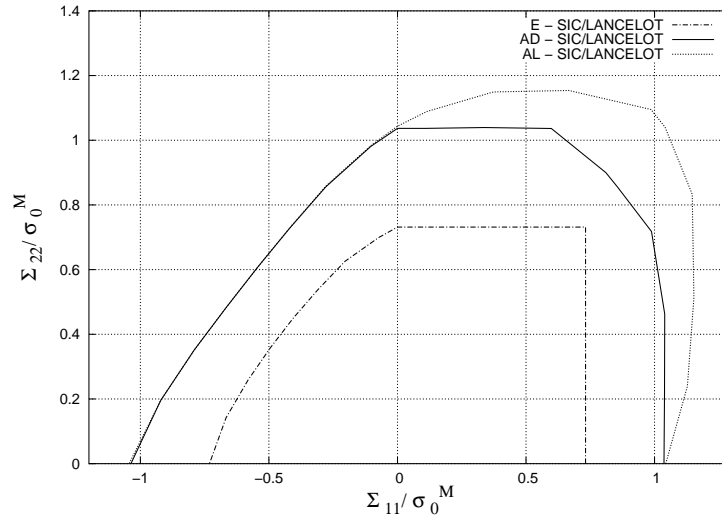


FIGURE V.26 – Matériau élastoplastique à inclusions sphériques élastiques calculé dans le plan  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ : *E* - Enveloppe d'élasticité, *AD* - Enveloppe d'adaptation, *AL* - Domaine d'analyse limite

raisonnables, les domaines et enveloppes de résistance sont donc tracés pour :  $p = 17$ , c'est-à-dire pour dix-sept directions de recherche, matérialisées par dix-sept domaines initiaux  $\mathcal{D}_r^0$ ,  $r \in [0,16]$ . Les résultats des simulations numériques sont présentés figure V.26. On constate que l'enveloppe d'adaptation et le domaine d'analyse limite coïncident pour toutes les directions  $r\delta$  satisfaisant :

$$90^\circ \leq r\delta \leq 180^\circ \quad (\text{V.18})$$

Tout chargement variable pouvant être inclus dans un rectangle  $\mathcal{D}^r$ , tel que  $r\delta$  satisfasse (V.18), est donc susceptible de déclencher un phénomène de ruine plastique de la cellule. La même remarque vaut pour la direction  $r\delta = 0^\circ$ .

## V.5 Bilan du chapitre

Illustratif de la méthode numérique proposée, ce chapitre possédait un objectif double :

- valider, par des comparaisons avec la littérature, les développements réalisés,
- illustrer les capacités de ces développements au travers de six exemples d'application, différents les uns des autres, soit par le type de cellule de base, soit par la nature du chargement imposé.

On s'est attaché à préciser, pour chacun des exemples traités, la cinématique utilisée, les problèmes cellulaires auxquels la méthode numérique fait appel ainsi que la taille du problème d'optimisation associé à la recherche du coefficient de charge à l'adaptation, en terme de nombre de variables d'optimisation, de contraintes d'inégalités et de contraintes d'égalités.

Un stratifié, matériau périodique dans une direction de l'espace et possédant une cellule de base classique a tout d'abord été étudié. Une première étude à déformation imposée a permis, par comparaison avec une approche directe de la littérature, de confirmer l'aptitude de la méthode à fournir des enveloppes d'adaptation correctes. Dans un second temps, l'étude du même matériau à contrainte imposée a permis de valider les domaines d'analyse limite, par comparaison avec une méthode incrémentale et des résultats analytiques de la littérature, et les domaines d'adaptation, par comparaison avec une méthode incrémentale basée sur un critère énergétique. Si ces études ont été essentiellement menées d'un point de vue statique, le matériau stratifié à contrainte imposée a également été étudié par l'approche cinématique dans une optique de comparaison des résultats avec ceux de l'approche statique : les comparaisons tendent pour l'instant à faire préférer l'approche statique, tant au niveau de la fiabilité des résultats qu'au niveau des temps de calculs. Cependant, afin de véritablement comparer les deux approches, il resterait à s'intéresser à la régularisation de la fonction de dissipation, en s'inspirant, par exemple, des récentes études de CHAABA *et al.* (2003) concernant l'approche cinématique de l'analyse limite et de CARVELLI (1999) et VU *et al.* (à paraître en 2004) concernant l'approche cinématique de l'adaptation élastoplastique.

Une structure fine périodiquement perforée, possédant donc une cellule de base du deuxième type, a ensuite été étudiée sous sollicitations planes par l'approche statique, en vue, entre autre, d'analyser l'influence d'une hypothèse telle celle des contraintes planes. En effet, le domaine d'analyse limite obtenu a été comparé avec celui obtenu par DÉBORDES *et al.* (1985), calculé sous cette hypothèse de contraintes planes : il en ressort que c'est une hypothèse qui va dans le sens de la sécurité.

Ont ensuite été successivement présentés trois types de structures soumises à des sollicitations généralisées : une plaque homogène, une plaque raidie par des renforts verticaux et enfin une plaque périodiquement trouée. Les maillages ont alors été réalisés afin tenir compte, autant que faire ce peut, de l'influence de la composante en flexion des chargements.

En dernier lieu, on présente l'étude par l'approche statique des capacités de résistance d'un matériau possédant une cellule de base classique, mais des propriétés de périodicité dans les trois directions de l'espace : un matériau élastoplastique renforcé par des inclusions sphériques élastiques. Ce dernier exemple, induisant des problèmes d'optimisation de taille relativement élevée, a alors permis d'évaluer les capacités de la méthode développée en cas de problèmes à grand nombre de variables d'optimisation.

A l'issue de ces simulations, il ressort donc que la méthode ne possède pas de limitations quant à la complexité de la cellule de base, sinon celles liées à la capacité de LANCELOT à traiter en des temps raisonnables des problèmes à grand nombre de variables d'optimisation.



# Conclusion générale

Ce travail est une contribution à l'analyse de la tenue mécanique de milieux hétérogènes sous chargements variables et bornés. En ce sens, on propose une méthode numérique permettant d'étudier, par une approche directe, l'adaptation de matériaux élastoplastiques parfaits à microstructure hétérogène, périodique et tridimensionnelle.

En effet, si la littérature fournit de nombreuses contributions traitant d'une part de l'adaptation de structures, c'est-à-dire de leur capacité à résister sous un chargement variable, et d'autre part de l'homogénéisation de milieux hétérogènes, afin de prendre rigoureusement en compte les phénomènes microscopiques qui influencent inévitablement le comportement macroscopique d'un milieu, il n'en n'est pas de même en ce qui concerne le couplage entre ces deux théories. Il existe effectivement très peu d'études, à notre connaissance, s'attachant à l'heure actuelle à coupler ces deux théories afin de traiter de l'adaptation de milieux hétérogènes sous chargements variables, en particulier lorsqu'il s'agit de plaques hétérogènes périodiques. Tout au moins, les quelques études disponibles, inspiratrices de ce travail, appliquent en général ce couplage à des milieux bidimensionnels, ou bien utilisent des théories autres que la théorie de l'homogénéisation périodique, ou encore utilisent effectivement la théorie de l'homogénéisation périodique, mais couplée à l'analyse limite ne permettant d'étudier la résistance d'un matériau que sous chargements proportionnels. Cette constatation a donc constitué la motivation principale de notre étude, dont l'objectif fut alors de tenter d'apporter des développements originaux, complétant les études de ces auteurs de par la considération de matériaux tridimensionnels et périodiques.

Pour ce faire, il a en fait été nécessaire de considérer trois théories : les théories de l'adaptation élastoplastique et de l'homogénéisation périodique, certes, mais également la théorie de l'optimisation non linéaire sous contraintes, puisque tout problème d'adaptation, traité de façon directe, se ramène à un problème d'optimisation, plus particulièrement à un problème de maximisation si l'on adopte l'approche statique de MELAN et à un problème de minimisation si l'on adopte l'approche cinématique de KOITER. Si les deux premières théories sont directement liées à la mécanique des solides, la troisième relève, quant-à-elle, de la programmation mathématique, utilisée dans bien d'autres domaines que la mécanique.

Le principe général des couplages consiste à se baser sur les théorèmes statique et cinématique, respectivement de MELAN et KOITER, et de les étendre au cas des matériaux à microstructure

hétérogène, en prenant bien soin de distinguer l'approche déformation, pour laquelle le chargement variable est de type déformation macroscopique, de l'approche contrainte, pour laquelle le chargement variable est de type contrainte macroscopique. Une fois les théorèmes généralisés, les domaines de résistance macroscopiques sont obtenus grâce à la résolution du problème d'adaptation posé sur la cellule de base tridimensionnelle, représentative du milieu hétérogène à étudier. Les développements permettent également d'analyser le comportement des milieux vis-à-vis de l'élasticité et de l'analyse limite. Ce deux derniers cas sont traités en tant que particularisation du problème d'adaptation. Les principales hypothèses, définissant le domaine de validité de ces résultats, sont qu'ils sont établis dans le cadre de la linéarité géométrique, que les chargements sont purement mécaniques et que les matériaux sont élastiques parfaitement plastiques, possédant un comportement local de VON-MISES.

Numériquement, ceci se traduit par un couplage entre un code éléments finis et un logiciel d'optimisation capable de traiter des problèmes non linéaires possédant un nombre relativement important de variables d'optimisation. L'objectif fixé au début de ces travaux est donc atteint : on dispose désormais d'un outil numérique général permettant d'étudier la résistance de matériaux hétérogènes sous chargements variables, tout en ne requérant, de la part de l'utilisateur, qu'un minimum d'information, à savoir :

- les caractéristiques géométriques et matérielles de la cellule de base,
- la nature des chargements auxquelles elle est soumise,
- le domaine de variations desdits chargements.

De plus, cet outil a été développé de manière à être le plus général possible :

- il permet de traiter toute cellule de base tridimensionnelle, aussi complexe soit elle, dans la limite, bien évidemment, des capacités des logiciels éléments finis et d'optimisation, point que nous aborderons dans les perspectives,
- l'utilisateur a le choix de travailler, ou non, en homogénéisation, ou sur une structure complète,
- dans le cas qui nous intéresse, à savoir le cas où l'option *homogénéisation* est activée, le chargement imposé peut être une déformation et/ou une contrainte macroscopique au sens classique des termes, ou bien une déformation et/ou une contrainte macroscopique généralisées, afin de traiter des problèmes de types plaques périodiques.

Enfin, les développements ont été pensés, dans la mesure du possible, de façon à ce que les opérations internes liées aux problèmes cellulaires et aux problèmes d'optimisation, soient au maximum transparentes pour l'utilisateur.

Les bilans réalisés en fin de chaque chapitre faisant office de synthèses intermédiaires détaillées, le récapitulatif des différentes étapes liées à la réalisation de ce travail ne sera pas plus approfondi ici. Par contre, tout approfondissement d'une thématique de recherche étant toujours le bienvenu, nous insistons dans ce qui suit sur les éventuelles suites à donner à cette étude,

en proposant quelques possibilités d'élargissement, ou encore quelques pistes de recherches supplémentaires, outre le fait d'agir sur les hypothèses premières en prenant en compte l'effet de l'écroutissage ou encore de l'endommagement.

L'un des approfondissements possibles consiste à automatiser entièrement les couplages abordés d'un point de vue cinématique. Hormis la mise en œuvre des techniques liées à la régularisation de la fonction de dissipation, cette perspective devrait être réalisable sans grandes difficultés étant donné que tous les éléments nécessaires à cette implémentation sont déjà disponibles. Ceci ne nécessite donc que le développement d'une commande supplémentaire dans le logiciel éléments finis SIC, analogue à celle développée dans le cas de l'approche statique, afin de créer automatiquement les fichiers de données du logiciel d'optimisation LANCELOT. Le fait que l'on ait préféré implémenter, et exploiter, en premier lieu l'approche statique, provient simplement du constat que l'approche cinématique nous a semblée plus largement étudiée dans la littérature.

La deuxième piste d'élargissement est plus directement liée aux logiciels utilisés. En effet, il ressort, suite à de nombreux essais de calculs, mais également suite à des discussions avec d'autres chercheurs lors de différents congrès, que le logiciel LANCELOT semble peiner à traiter en des temps raisonnables des problèmes non linéaires à très grand nombre de variables d'optimisation. Puisqu'une grande partie des temps de calculs est consommée par la partie optimisation, il serait peut être préférable, afin de pouvoir traiter des cellules de base très complexes et d'éviter de devoir systématiquement trouver un compromis entre précision du maillage et temps de calculs, d'envisager l'utilisation d'un autre logiciel d'optimisation, ne serait-ce que pour comparer ses performances et celles de LANCELOT. Il semblerait que le logiciel MOSEK, développé depuis 1997 par Erling D. ANDERSEN and Knud D. ANDERSEN, également dédié à la résolution de problèmes d'optimisation grande échelle, possède de telles caractéristiques et soit apte à résoudre ce type de problèmes : cette piste reste à explorer.

Enfin, la plus grande perspective en terme de développements théoriques concerne le fondement même du raisonnement. En effet, les domaines de résistance sont donnés en termes de chargements macroscopiques sur la cellule de base et sont attribués, par analogie avec les raisonnements de SUQUET concernant le couplage entre homogénéisation périodique et analyse limite, au matériau homogène équivalent. L'approfondissement consisterait alors à démontrer rigoureusement que l'on est également en droit, dans le cas du couplage entre homogénéisation périodique et adaptation élastoplastique, d'attribuer ce domaine de résistance, *a priori* attaché à la cellule de base, au matériau homogène équivalent. En d'autres termes, ceci consiste à prouver que si, en tout point d'un milieu homogène équivalent, les déformations et/ou contraintes –engendrées par un chargement classique en déplacement et/ou en force– sont incluses dans le domaine d'adaptation obtenu en raisonnant sur la cellule de base, alors le milieu homogène équivalent s'adapte. La méthodologie adoptée serait alors totalement fondée et l'intuition, poussant les chercheurs travaillant sur ce thème de recherche à adopter cette méthodologie, *a posteriori* justifiée.





# TABLE DES FIGURES

I.1	Chargements limites . . . . .	9
I.2	Chargements élastiques et limites . . . . .	10
I.3	Domaine et trajet de chargements . . . . .	17
I.4	Principales méthodes d'optimisation existantes et utilisées . . . . .	30
I.5	Principe de l'homogénéisation . . . . .	32
I.6	Définition des échelles et du VER . . . . .	33
I.7	Valeur moyenne des variables d'état . . . . .	34
I.8	Différents VER: $V^1$ , 1 inclusion; $V^2$ , 4 inclusions; $V^4$ , 16 inclusions; $V^6$ , 36 inclusions et $V^8$ , 64 inclusions . . . . .	42
I.9	Variations de $\mu_t$ en fonction du rapport $1/m$ (d'après MICHEL (2001)) . . . . .	42
I.10	Variations de $K$ en fonction du rapport $1/m$ (d'après MICHEL (2001)) . . . . .	42
I.11	Choix de la cellule de base . . . . .	43
I.12	Plaque trouée et cellule de base associée . . . . .	45
I.13	Cellule de base d'une plaque périodique . . . . .	47
II.1	Milieu continu 3D et sollicitations . . . . .	53
II.2	Milieu réel $\Omega$ et milieu de référence $\Omega^{(e)}$ . . . . .	57
II.3	Réponse purement élastique . . . . .	58
II.4	Ruine plastique instantanée . . . . .	59
II.5	Phénomène de rochet : ruine plastique incrémentale . . . . .	60
II.6	Plasticité alternée : ruine par fatigue . . . . .	60
II.7	Phénomène d'adaptation . . . . .	61
II.8	Portique en acier et cycle de chargements (d'après KÖNIG (1987)) . . . . .	62
II.9	Déplacement $\delta$ en fonction du nombre de cycles $N$ pour différentes valeurs de $P$ (d'après KÖNIG (1987)) . . . . .	63
II.10	Poutre encastrée de section rectangulaire . . . . .	64
II.11	Contraintes élastiques en fonction du moment appliqué et de l'altitude dans une section $S_{y_1^*}$ . . . . .	65
II.12	Plastification progressive d'une section $S_{y_1^*}$ . . . . .	67
II.13	Contraintes purement élastiques et contraintes résiduelles dans la section $S_{y_1^*}$ . . . . .	67
II.14	Poutre étudiée et déplacement cyclique imposé . . . . .	68

II.15 Evolution de la réaction $R_3$ (sur $S_0$ ) en fonction du déplacement imposé $U$ . . . . .	69
II.16 Evolutions temporelles de la réaction sur la section $S_0$ et de l'énergie dissipée plastiquement . . . . .	70
II.17 Evolution de la réaction $R_3$ (sur $S_0$ ) en fonction du déplacement imposé $U$ . . . . .	70
II.18 Evolutions temporelles de la réaction sur la section $S_0$ et de l'énergie dissipée plastiquement . . . . .	71
II.19 Comportement local élastoplastique parfait . . . . .	72
III.1 Propriétés de la cellule de base . . . . .	87
III.2 Sollicitations réelles et chargements macroscopiques . . . . .	88
III.3 Choix du domaine initial de chargements . . . . .	90
III.4 Cellules de base réelle et de référence . . . . .	91
III.5 Schéma de synthèse des différents problèmes traités pour l'approche statique du couplage homogénéisation/adaptation . . . . .	96
III.6 Approche statique: principe de la maximisation . . . . .	98
III.7 Schéma de synthèse des différents problèmes traités pour l'approche cinématique du couplage homogénéisation/adaptation . . . . .	101
III.8 Matériau stratifié constitué de deux couches représentatives . . . . .	102
III.9 Cellule de base parallélépipédique . . . . .	104
III.10 Cellule de base linéique . . . . .	104
III.11 Solution par couche du problème d'adaptation à déformation imposée . . . . .	111
III.12 Solution du problème d'analyse limite à contrainte imposée . . . . .	118
III.13 Solution du problème d'adaptation à contrainte imposée . . . . .	120
IV.1 Définition des points de charge pour l'élasticité, l'adaptation et l'analyse limite . . . . .	127
IV.2 Illustration des relations de périodicité sur les déplacements nodaux . . . . .	138
IV.3 Structure de la matrice d'équilibre . . . . .	143
IV.4 Amplification du domaine initial de chargements pour les trois types d'analyses . . . . .	146
IV.5 Enveloppes initiale et finale des domaines d'adaptation . . . . .	147
IV.6 Schéma de synthèse de la méthode numérique proposée . . . . .	149
V.1 Matériau stratifié: caractéristiques géométriques et mécaniques . . . . .	153
V.2 Enveloppe des chargements initiaux en déformation ou en contrainte . . . . .	154
V.3 Cellule de base parallélépipédique et maillage de cette cellule . . . . .	154
V.4 Matériau stratifié calculé dans le plan $(E_{11}, E_{22})$ : E - Enveloppe d'élasticité, AD - Enveloppe d'adaptation . . . . .	158
V.5 Matériau stratifié calculé dans les plans $(E_{11}, E_{33})$ et $(E_{22}, E_{33})$ : E - Enveloppe d'élasticité, AD - Enveloppe d'adaptation ( $E_{11}^0 = E_{22}^0 = E_{33}^0 = 10^{-3}$ ) . . . . .	159
V.6 Matériau stratifié calculé dans les plans $(E_{11}, E_{22})$ et $(E_{11}, E_{33})$ : E - Enveloppe d'élasticité, AD - Enveloppe d'adaptation . . . . .	160

V.7	Matériau stratifié calculé dans les plans $(E_{11}, E_{12})$ , $(E_{11}, E_{13})$ et $(E_{11}, E_{23})$ : E - Enveloppe d'élasticité, AD - Enveloppe d'adaptation . . . . .	160
V.8	Matériau stratifié calculé dans les plans $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ et $(\Sigma_{11}, \Sigma_{33})$ : AL - Analyse limite	161
V.9	Matériau stratifié calculé dans les plans $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ et $(\Sigma_{11}, \Sigma_{33})$ : E - Enveloppe d'élasticité, AD - Enveloppe d'adaptation, AL - Domaine d'analyse limite . . . .	162
V.10	Matériau stratifié calculé dans les plans $(\Sigma_{11}, \Sigma_{12})$ , $(\Sigma_{11}, \Sigma_{13})$ et $(\Sigma_{11}, \Sigma_{23})$ : E - Enveloppe d'élasticité, AD - Enveloppe d'adaptation, AL - Domaine d'analyse limite . . . . .	163
V.11	Exploitation de l'enveloppe d'adaptation (AD) du matériau stratifié calculé dans le plan $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ . . . . .	164
V.12	Stratifié calculé dans le plan $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ : comparaison entre les approches statique et cinématique . . . . .	165
V.13	Plaque trouée: caractéristiques géométriques et mécaniques . . . . .	166
V.14	Cellule de base et maillage du huitième de la cellule de base . . . . .	167
V.15	Plaque perforée calculée dans le plan $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ : détail des validations du domaine d'analyse limite et de l'enveloppe d'adaptation . . . . .	168
V.16	Plaque perforée calculée dans le plan $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ : E - Enveloppe d'élasticité, AD - Enveloppe d'adaptation, AL - Domaine d'analyse limite . . . . .	169
V.17	Plaque homogène: caractéristiques géométriques et mécaniques de la cellule de base	170
V.18	Plaque homogène calculée dans le plan $(N_{11}, M_{11})$ : E - Enveloppe d'élasticité, AD - Enveloppe d'adaptation, AL - Domaine d'analyse limite . . . . .	171
V.19	Plaque 1D-périodique: caractéristiques géométriques et mécaniques . . . . .	172
V.20	Cellule de base et maillage de la cellule de base . . . . .	172
V.21	Plaque renforcée calculée dans le plan $(N_{11}, M_{11})$ : E - Enveloppe d'élasticité, AD - Enveloppe d'adaptation, AL - Domaine d'analyse limite . . . . .	173
V.22	Cellule de base et maillage du quart de la cellule de base . . . . .	174
V.23	Plaque trouée calculée dans le plan $(N_{11}, M_{11})$ : E - Enveloppe d'élasticité, AD - Enveloppe d'adaptation, AL - Domaine d'analyse limite . . . . .	175
V.24	Matériau élastoplastique à inclusion sphériques et caractéristiques associées . . .	176
V.25	Maillage du huitième de la cellule de base . . . . .	176
V.26	Matériau élastoplastique à inclusions sphériques élastiques calculé dans le plan $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22})$ : E - Enveloppe d'élasticité, AD - Enveloppe d'adaptation, AL - Domaine d'analyse limite . . . . .	177
B.1	Comportement local de la poutre . . . . .	11



# LISTE DES TABLEAUX

III.1	Caractéristiques des deux couches de matériau . . . . .	103
V.1	Comparaisons analytique/numérique pour un chargement unidimensionnel . . . .	156



# BIBLIOGRAPHIE

- J. ABADIE ET J. CARPENTIER. *Optimization*, chapter 4: "Generalization of the Wolfe reduced gradient method to the case of nonlinear constraints". Academic Press, 1969.
- S. AUNAY. *Architecture de logiciel de modélisation et traitements distribués*. Thèse de Doctorat, Université Technologique de Compiègne, France, 1990.
- T. BELYSCHKO. Plane stress shakedown analysis by finite elements. *Int. J. Mech. Sci.*, 14: 619–625, 1972.
- H. BLEICH. Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahlwerke unter der Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes. *Bauingenieur*, 13 :261–267, 1932.
- A BORKOWSKI ET M. KEIBER. On a numerical approach to shakedown analysis of structures. *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, 22 :101–119, 1980.
- M. BORNERT, T. BRETHER, ET P. GILORMINI. *Homogénéisation en mécanique des matériaux*, volume 1. Hermes Sciences Europe Ltd., Paris, 2001.
- M. BOULBIBANE ET D. WEICHERT. Application of shakedown theory to soils with non associated flow rules. *Mech. Res. Comm.*, 24, 1997. 513-519.
- S. BOURGEOIS. *Modélisation de panneaux structuraux légers*. Thèse de Doctorat, Université de la Méditerranée, 1997.
- S. BOURGEOIS, O. DÉBORDES, ET P. PATOU. Homogénéisation et plasticité de plaques minces. *Revue Européenne des éléments finis*, 7(1-2-3) :39–54, 1998.
- L. BOUSSHINE, A. CHAABA, ET G. DE SAXCÉ. A new approach to shakedown analysis for non-standard elastoplastic material by the bipotential. *Int. J. Plasticity*, 19(5) :583–598, 2003.
- D. CAILLERIE. Thin elastic and periodic plates. *Math. Methods Appl. Sci.*, 6, 1984. 159-191.
- M. CALDORA COSTA. *Optimisation de dispositifs électromagnétiques dans un contexte d'analyse par la méthode des éléments finis*. Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2001.
- V. CARVELLI. Shakedown analysis of periodic heterogeneous materials by a kinematic approach. *Strojnicky Casopis - Mechanical Engineering materials*, 50(4) :229–240, 1999.
- V. CARVELLI, G. MAIER, ET A. TALIERCIO. Kinematic limit analysis of periodic heterogeneous media. *Computer Modeling in Engineering and Science*, 1(2) :19–30, 2000.
- A. L. CAUCHY. Méthode générale pour la résolution des systèmes d'équations simultanées. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, (XXV), 1847. 536-538.



- G. CERADINI. Sull'adattamento dei corpi elastoplastici soggetti ad azioni dinamiche. *Giornale del Genio Civile*, (415), 1969. 239-258.
- A. CHAABA, L. BOUSSHINE, ET G. DE SAXCÉ. Kinematic limit analysis modelling by a regularization approach and finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 57:1899-1922, 2003.
- A. R. CONN, N. I. M. GOULD, ET PH. L. TOINT. *LANCELOT: A Fortran Package for Large-Scale Nonlinear Optimization*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- L. CORRADI ET G. MAIER. Dynamic non-shakedown theorem for elastic perfectly-plastic continua. *J. Mech. Phys. Sol.*, 22:401-413, 1974.
- L. CORRADI ET A. ZAVELANI. A linear programming approach to shakedown analysis of structures. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 3:37-53, 1974.
- C. A. COULOMB. Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture. *Mémoire présenté à l'Académie Royale des Sciences, Paris*, 1773.
- R. COURANT. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American Math Society*, 49:1-23, 1943.
- G. B. DANTZIG. Programming in a linear structure. *Econometrica*, 17(1), 1949.
- G. B. DANTZIG. *Activity Analysis of Production and Allocation*, chapter 21: "Maximisation of a linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities", Eds Koopmans, T. C. Cowles Commission Monograph No. 13, Wiley, 1951.
- D. DAVIES ET W. H SWANN. *Optimization*, chapter 12: "Review of Constrained Optimization", Eds Fletcher, R. Academic Press, London, 1969.
- O. DÉBORDES, C. LICHT, J. J. MARIGO, P. MIALON, ET J. C. MICHEL. Calcul des charges limites de structures fortement hétérogènes. *Actes du Troisième Colloque Tendances Actuelles en Calcul de Structures*, pages 55-71, 1985.
- P. DE BUHAN. Mécanique des solides anélastiques - homogénéisation en calcul à la rupture: le cas du matériau composite multicouche. *C.R. Acad. Sci. Paris, t. 296, Série II*, pages 933-936, 1983.
- P. DE BUHAN. Critère de résistance macroscopique pour les matériaux composites à fibres. *C.R. Acad. Sci. Paris, t. 307, Série II*, pages 227-232, 1988.
- P. DE BUHAN ET A. TALIERCIO. A homogenization approach to the yield strength of composite materials. *Eur. J. Mech. A Solids*, 10(2):129-154, 1991.
- O. DE DONATO. Second shakedown theorem allowing for cycles of both loads and temperature. *Ist. Lombardo Scienza Lettere (A)*, 104:265-277, 1970.
- G. DE SAXCÉ, J. B. TRITSCH, ET M. HJIAJ. *Inelastic analysis of structures under variables loads: theory and engineering applications*, chapter "Shakedown of elastic-plastic structures with non linear kinematical hardening by the bipotential approach", Eds Maier, G. and Weichert, D. Kluwer Academic Publishers, 2000.

- 
- O. DÉBORDES. Dualité des théorèmes statique et cinématique dans la théorie de l'adaptation des milieux continus élastoplastiques. *C.R. Acad. Sci.*, t. 282, pages 535–537, 1976.
- O. DÉBORDES ET B. NAYROLES. Sur la théorie et le calcul à l'adaptation des structures élastoplastiques. *Journal de Mécanique*, 15(1), 1976.
- G. DHATT ET G. TOUZOT. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Collection Université de Compiègne, Deuxième édition, 1984.
- E. DOMINICY-LENOBLE. *Plasticité de coques périodiques en grandes transformations*. Thèse de Doctorat, Université de la Méditerranée, 1999.
- D. C. DRUCKER. A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. *1st U.S. Nat. Cong. Appl. Mech.*, 1951.
- B. DRUYANOV ET I. ROMAN. *Inelastic analysis of structures under variables loads: theory and engineering applications*, chapter "On shakedown of elastic plastic bodies with brittle damage", Eds Maier, G. and Weichert, D. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- G. DUVAUT ET J. L. LIONS. *Les inéquations en Mécanique et en Physique*. Dunod, Paris, 1972.
- G. J. DVORAK, D. C. LAGOUDAS, ET C.-M HUANG. *Inelastic analysis of structures under variable repeated loads*, chapter Shakedown and fatigue damage in metal matrix composites, pages 183–196. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
- A. EL OMRI, A. FENNAN, F. SIDOROFF, ET A. HIHI. Elastic-plastic homogenization for layered composites. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 19 :585–601, 2000.
- S. M. FEINBERG. Printsip perdel'noj napryazhennosti (the principle of limit stress). *Prikl. Mat. Meh.*, 12:63–70, 1948.
- X. Q. FENG ET X. S. LIU. On shakedown of three-dimensional elastoplastic strain-hardening structures. *Int. J. Plasticity*, 12(10):1241–1256, 1996.
- X.-Q. FENG ET S.-W. YU. Damage and shakedown analysis of structures with strain-hardening. *Int. J. Plast.*, 3:237–249, 1995.
- R. FLETCHER ET S. A. LILL. *Nonlinear Programming*, chapter "A Class of Methods for Nonlinear Programming, II; Computational Experience", Eds Rosen, J. B. and Mangasarian, O. L. and Ritter, K., pages 67–92. Academic Press, 1971.
- P. FRANCESCATO ET J. PASTOR. Lower and upper numerical bounds to the off-axis strength of unidirectionnal fiber-reinforced composites by limit analysis methods. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 16 :213–234, 1997.
- J. FRÉDÉRIC BONNANS, J. C. GILBERT, LEMARÉCHAL C., ET SAGASTIZÁBAL C. A. *Numerical Optimization: Theoretical and practical Aspects*. Springer, 2003.
- G. GALILÉE. *Discorzi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*. Dialogo secondo, Leyden, 1638.
- F. GIAMBANCO ET L. PALIZZOLO. Optimal bounds on plastic deformations for bodies constituted of temperature-dependant elastic hardening material. *ASME, J. Appl. Mech.*, 64:1–9, 1997.

- C.-H. GOH, R. W. NEU, ET D. L. MCDOWELL. Crystallographic plasticity in fretting of Ti-6AL-4V. *Int. J. Plasticity*, 19(10):1627–1650, 2003.
- D. A. GOKHFELD. The load-carrying capacity of uneven heated structures. *Izd. Mashinostroj, Moskva*, 1970.
- D. A. GOKHFELD ET O. F. CHERNIAVSKY. Limit analysis of structures at thermal cycling. *Leyden: Sijthoff and Noordhoff*, 1980.
- H. J. GREENBERG ET W. PRAGER. *On limit design of beams and frames*. Brown Univ. Tech. Rep. A 18.1. *Trans. A.S.C.E.* 117, 447-484, Moskva, 1949.
- J. GROSS-WEEGE. Zum einspielverhalten von flächentragwerken. Technical Report Report No. 58, Institute of Mechanics, Ruhr-University Bochum, 1988.
- J. GROSS-WEEGE. A unified formulation of statical shakedown criteria for geometrically nonlinear problems. *Int. J. Plasticity*, 6:433–447, 1990.
- J. GROSS-WEEGE ET D. WEICHERT. On numerical investigation of the shakedown of elastic-plastic sheets under variable mechanical and thermal loads (in german). *Ing.-Arch*, 57:297–306, 1987.
- J. GROSS-WEEGE ET D. WEICHERT. Elastic-plastic shells under variable mechanical and thermal loads. *Int. J. Mech. Sci.*, 34:863–880, 1992.
- M. GRÜNING. *Die Tragfähigkeit statisch unbestimmter Tragwerke aus Stahl bei beliebig häufig wiederholter Belastung*. Springer, Berlin, 1926.
- A. A. GVOZDEV. Determination of the value of failure load for statically indeterminate systems subject to plastic deformation. *C. R. Konf. Plast. Def., Moscow*. Engl. trans. *Int. J. Mech. Sc.* 1, 1960, 322-335, 1936, 1938.
- A. A. GVOZDEV. *Structural Limit Analysis by Means of the Method of Limit Equilibrium*. Strojizdat, Moskva, 1949.
- A. HACHEMI. *Contribution à l'analyse de l'adaptation des structures inélastiques avec prise en compte de l'endommagement*. Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1994.
- A. HACHEMI, H. MAGOARIEC, O. DÉBORDES, ET D. WEICHERT. Application of shakedown theory to layered composites. *ECCM II - 2<sup>nd</sup> Eur. Conf. on Comp. Mech.*, Cracow, Poland, June 26-29, 2001. Proceedings on Cd-rom (9 pages), Cracow University of Technology.
- B. HALPHEN ET Q. S. NGUYEN. Sur les matériaux standards généralisés. *J. Mech.*, 14:39–63, 1975.
- M. R. HESTENES. Multiplier and gradient methods. *J. of Optimization Theory and Applications*, 4:303–320, 1969.
- M. R. HESTENES ET E. STIEFEL. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *J. Res. Nat. Bur. Standards*, 49:409–436, 1952.
- R. HILL. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, London, 1950.
- P. G. HODGE. *Plastic Analysis of Structure*. McGraw-Hill, New-York, 1959.

- 
- Y. J. HUANG ET E. STEIN. *Shakedown of a CT specimen with St52 Steel - Experimental, analytical and numerical investigations*, volume 30. J. Strain Anal., 1995.
- S. C. HUNTER, K. MARGUERRE, H. G. HOPKINS, W. T. KOITER, W. A. GREEN, P. CHADWICK, B. A. BILBY, ET R. MUKI. *Progress in solid mechanics*, volume 1, Eds Sneddon, I. N. and Hill, R. North-Holland Publishing Compagny, Amsterdam, 1960.
- T. H. HYDE, B. B. SAHARI, ET J. J. WEBSTER. The effect of axial loading and axial restraint on the thermal ratchetting of thin tubes. *Int. J. Mech. Sci.*, 27 :679–692, 1985.
- A. A. ILYUSHIN. *Plasticité*. Eyrolles, 1956.
- T. KANIT, S. FOREST, I. GALLIET, V. MOUNOURY, ET D. JEULIN. Determination of the size of the representative volume element for random composites : statical and numerical approach. *Int. J. Solids Struc.*, 40 :3647–3679, 2003.
- S. KARADENIZ ET A. R. S. PONTER. A linear programming upper bound approach to the shakedown limit of thin shells subjected to variable thermal loading. *J. Strain Anal.*, 19 :221–230, 1984.
- L. KHALIJ, S. HARIRI, ET R. VAUCHER. Shakedown of three-dimensional structures under cyclic loading with the simplified analysis. *Comp. Mater. Sci.*, 24(3) :393–400, 2002.
- M. KLEIBER ET J. A. KÖNIG. Incremental shakedown analysis in the case of thermal effects. *Int. J. Num. Meth. Engng*, 20 :1567–1573, 1984.
- W. T. KOITER. Some remarks on plastic shakedown theorems. *Proc. Eighth Int. Congr. Appl. Mech.* Istnabul, 220–230, 1952.
- W. T. KOITER. A new general theorem on shake-down of elastic-plastic structures. *Proc. Koninkl. Akad. Wet., B* 59, pages 24–34, 1956.
- W. T. KOITER. *Progress in solid mechanics*, chapter "General theorems for elastic-plastic solids", pages 165–221. Sneddon, I.N., Hill, R., 1960.
- J. A. KÖNIG. Theory of shakedown of elastic-plastic structures. *Arch. Mech. Stos.*, 18 :227–238, 1966.
- J. A. KÖNIG. *Shakedown of Elastic-Plastic Structures*. Elsevier, Amsterdam, 1987.
- J. A. KÖNIG ET M. KLEIBER. On a new method of shakedown analysis. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Tech.*, 26 :165, 1978.
- J. A. KÖNIG ET A. SIEMASZKO. Strainhardening effects in shakedown process. *Ing.-Arch.*, 58 :58–66, 1988.
- H. W. KUHN ET A. W. TUCKER. Non linear programming, pp. 481–493. J. Neyman, editor, *Second Bekerley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. University of California Press, Bekerley, 1951.
- F. LÉNÉ. *Contribution à l'étude des matériaux composites et de leurs endommagements*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI, France, 1984.
- M. J. LOWE. *Nonlinear Programming : Augmented Lagrangian Techniques for Constrained Minimization*. Thèse de Doctorat, Montana State University, Bozeman, 1974.

- H. MAGOARIEC. *Adaptation, Homogénéisation et Matériaux Composites*. Rapport de DEA, ESM2 - Université d'Aix-Marseille II, 2000.
- H. MAGOARIEC, S. BOURGEOIS, ET O. DÉBORDES. Couplage numérique entre homogénéisation périodique et adaptation pour des matériaux élastoplastiques hétérogènes. *Actes de Giens 2003 - 6<sup>ième</sup> Colloque National en Calcul des Structures*, volume III, pages 499–506, 20-23 mai 2003a.
- H. MAGOARIEC, S. BOURGEOIS, ET O. DÉBORDES. Numerical limit and shakedown analyses of thin heterogeneous periodic plates. *Plasticity'2003 - Tenth International Symposium on Plasticity, Plasticity and Metal forming*, pages 91–93, July 7-11, 2003b.
- H. MAGOARIEC, S. BOURGEOIS, ET O. DÉBORDES. Elastic plastic shakedown of 3D periodic heterogeneous media : a direct numerical approach (21 pages, sous presse). *Int. J. Plasticity*, acceptée pour publication le 23 juillet 2003.
- H. MAGOARIEC, S. BOURGEOIS, O. DÉBORDES, A. HACHEMI, ET D. WEICHERT. A numerical approach of shakedown analysis coupled with periodic homogenisation for 3D elastic plastic media. *WCCM V - Fifth World Congress on Computational Mechanics*, July 4-11, 2002.
- O. MAHREHOLTZ, K. LEERS, ET J. A. KÖNIG. *Metal forming and impact mechanics*, chapter "Shakedown of tubes : A theoretical analysis and experimental investigations", pages 155–172. Pergamon Press, Oxford, 1985.
- G. MAIER. Shakedown theory in perfect elastoplasticity with associated and nonassociated flow-laws : a finite element, linear programming approach. *Meccanica*, 4:250–260, 1969.
- G. MAIER. A shakedown matrix theory allowing for workhardening and second order geometric effects. A. Sawczuk, editor, *Symp. Foundations of plasticity*, 417-433, 1972.
- G. MAIER, V. CARVELLI, ET G. COCCHETTI. On direct methods for shakedown and limit analysis. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 19 (Special Issue) :S79–S100, 2000.
- J. MANDEL. Adaptation d'une structure plastique écrouissable et approximations. *Mech. Res. Com.*, 3:483–488, 1976.
- J. MANDEL, J. ZARKA, ET B. HALPHEN. Adaptation d'une structure élastoplastique à écrouissage cinématique. *Mech. Res. Com.*, 4:309–314, 1977.
- J. J. MARIGO, P. MIALON, J. C. MICHEL, ET P. SUQUET. Plasticité et homogénéisation : un exemple de calcul des charges limites d'une structure hétérogène. *Journal de Mécanique théorique et appliquée*, 6(1) :47–75, 1987.
- CH. MASSONNET ET M. A. SAVE. *Plastique Analysis and Design*. Blaisdell, New-York-Toronto-London, 1965.
- E. MELAN. Theorie statisch unbestimmter Systeme aus ideal-plastischem Baustoff. *Sitber. Akad. Wiss, Wien, Abt. IIa 145*, pages 195–218, 1936.
- E. MELAN. Der spannungszustand eines mises-henckyschen kontinuums bei veränderlicher belastung. *Sitber. Akad. Wiss, Wien, Abt. IIa 147*, pages 73–87, 1938.
- J. C. MICHEL. *Homogénéisation en mécanique des matériaux 1 : Matériaux élastiques et milieu périodiques*, chapter 2 : "Théorie des modules effectifs. Approximations de Voigt et de Reuss", pages 41–56. Hermes Science, 2001.

- 
- J. C. MICHEL, H. MOULINEC, ET P. SUQUET. Effective properties of composites materials with periodic microstructure: a computational approach. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, 172:109–143, 1999.
- M. MINOUX. *Programmation mathématique, Théorie et algorithmes*. Dunod, Tomes 1 et 2, 1983.
- J. J. MOREÉ. *Mathematical Programming, the State of the Art*, chapter "Recent developments in algorithms and software for trust region methods", pages 258–287. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- P. MORELLE. Numerical shakedown analysis of axisymmetric sandwich shells: an upper bound formulation. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 23:2071–2088, 1986.
- P. MORELLE ET H. NGUYEN-DANG. Etude numérique de l'adaptation plastique des plaques et des coques de révolution par les éléments finis d'équilibre. *J. de Méc. Théor. Appl.*, 2:567, 1983.
- Z. MRÓZ, D. WEICHERT, ET S. DOROSZ. Inelastic behaviour of structures under variables loads. *Kluwer Academic Publishers: Dordrecht*, 1995.
- W. MURRAY. Ill-conditioning in barrier and penalty functions arising in constrained nonlinear programming, 13-20. *Sixth International Symposium on Mathematical Programming*. Princeton University, 1967.
- B. G. NEAL. Plastic collapse and shake-down theorems for structures of strainhardening material. *J. Aeri. Sci.*, 17:297–306, 1950.
- Q. S. NGUYEN ET G. GARY. Flambage par déformations plastiques accumulées sous charge cyclique additionnelle. *J. de Méc. Théor. et Appl.*, 2:351–373, 1983.
- H. NGUYEN-DANG ET L. PALGEN. Shakedown analysis by displacement method and equilibrium finite elements. *SMIRT-5 paper L3/3, Berlin*, 1979.
- D. A. PIERRE. Nonlinear programming: Research goals and preliminary results. *Research Memorandum S10, Electronics Research Laboratory*, pages Montana State University, Bozeman, Montana, 1971.
- D. A. PIERRE ET M. J. LOWE. *Mathematical Programming Via Augmented Lagrangien, An introduction with Computer Programs*. Addison-Wesley Publishing Company, 1975.
- C. POLIZZOTTO, G. BORINO, ET P. FUSHI. An extended shakedown theory for elastic-plastic-damage material models. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 15:825–858, 1996.
- A. R. S. PONTER. A general shakedown theorem for elastic-plastic bodies with workhardening. *SMIRT-3, paper L5/2*, 1975.
- A. R. S. PONTER ET H. F. CHEN. Shakedown and limit analyses for 3-D structures using the linear matching method. *Int. J. of Pressure Vessels and Piping*, 78:443–451, 2001.
- A. R. S. PONTER ET S. KARADENIZ. An extended shakedown theory for structures that suffer cyclic thermal loading. part i: theory. part ii: applications. *ASME, J. Appl. Mech.*, 52:877–889, 1985.
- A. R. S. PONTER ET F. A. LECKIE. On the behaviour of metal matrix composites subjected to cyclic thermal loading. *J. Mech. Phys. Solids*, 46:2183–2199, 1998.

- E. P. POPOV ET R. E. MC CARTHY. Deflection stability of frames under repeated loads. *J. Eng. Mech. Div.*, 86:61–78, 1960.
- M. J. D. POWELL. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivations. *Computer Journal*, 7:155–162, 1965.
- M. J. D. POWELL. *Optimization*, chapter "A Method for Nonlinear Constraints in Minimization Problems". Ed. R. Fletcher. Academic Press, New-York, 1969.
- W. PRAGER. Shakedown in elastic-plastic media subjected to cycles of load and temperature. *Symp. Plastica nella Scienza delle Costruzioni*. Bologna, 239-244, 1956.
- W. PRAGER ET P. G. HODGE. *Theory of perfectly Plastic Solids*. Wiley, New York, 1951.
- S. PYCKO ET G. MAIER. Shakedown theorems for some classes of nonassociative hardening elastic-plastic material models. *Int. J. Plast.*, 11:367–395, 1995.
- M. RAKOTOVELO, L. TALEB, ET M. COUSIN. On the validation of the methods related to cyclic behavior of metallic structures. *Int. J. Plast.*, 15:457–478, 1999.
- R. T. ROCKAFELLAR. New applications of duality in convex programming. *4th Conference on Probability*, Brasov, Romania, 1971.
- R. T. ROCKAFELLAR. A dual approach to solving nonlinear programming problems by unconstrained optimization. *Mathematical Programming* 5, 5:354–373, 1973.
- J. B. ROSEN. The gradient projection method for nonlinear programming, part i: Linear constraints. *SIAM J. of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 8:181–217, 1960.
- J. B. ROSEN. The gradient projection method for nonlinear programming, part ii: Nonlinear constraints. *SIAM J. of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 9:514–532, 1961.
- V. I. ROZENBLUM. On shakedown of uneven heated elastic-plastic bodies. *Izv. Akad. Nauk. SSSR. OTN, Mekh. Mash.*, 7:136–138, 1957.
- V. I. ROZENBLUM. On shakedown analysis of uneven heated elastic-plastic bodies. *Prikl. Mat. Tkh. Fiz.*, 5:98–101, 1965.
- E. SANCHEZ-PALENCIA. *Non homogeneous media and vibration theory: Lecture notes in Physics n°127*. 1980.
- A. SAWCZUK. Evaluation of upper bounds to shakedown loads of shells. *J. Mech. Phys. Solids*, 17:291–301, 1969.
- J. SCHEER, H. J. SCHEIBE, ET D. KUCH. Untersuchung von Trägerschwächungen unter wiederholter Belastung bis in den plastischen Bereich. Technical Report Report No. 6099, Institut für Stahlbau, TU Braunschweig, 1990.
- F. SCHWABE. *Einspieluntersuchungen von Verbundwerkstoffen mit periodischer Mikrostruktur*. Thèse de Doctorat, RWTH, Aachen, Deutschland, 2000.
- F. SIDOROFF. *Cours sur les grandes transformations*. Rapport Gréco, N°51, 1982.
- E. STEIN, G. ZHANG, R. MAHNKEN, ET J. A. KÖNIG. *Recent developments of micromechanics*, chapter Micromechanical modelling and computation of shakedown with nonlinear kinematic hardening including examples for 3-D problems. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

- 
- H. STUMPF ET B. SCHIECK. *Inelastic analysis of structures under variables loads: theory and engineering applications*, chapter "Shakedown at finite elasto-plastic strains", Eds Maier, G. and Weichert, D. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- P. SUQUET. *Plasticité et homogénéisation*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, France, 1982.
- P. SUQUET. Mécanique des milieux continus, analyse limite et homogénéisation. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 296 :1355–1358, 1983.
- P. S. SYMONDS. Shakedown of continuous media. *J. Appl. Mech.*, 18 :85–89, 1951.
- A. TALIERCIO. Lower and upper bounds to the macroscopic strength domain of a fiber reinforced composite material. *Int. J. Plasticity*, 8 :741–762, 1992.
- J. Q. TARN, G. J. DVORAK, ET M. S. M. RAO. Shakedown of unidirectional composites. *Int. J. Solids Struc.*, 11 :751–764, 1975.
- J. B. TRITSCH. *Analyse d'adaptation des structures élasto-plastiques avec prise en compte des effets géométriques*. Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1993.
- S. TURGEMAN ET J. PASTOR. Comparaison des charges limites d'une structure hétérogène et homogénéisée. *Journal de Mécanique théorique et appliquée*, 6(1) :121–143, 1987.
- D.K VU, A.-M. YAN, ET H. NGUYEN-DANG. A dual form for discretized kinematic formulation in shakedown analysis. *Int. J. Solids Struc.*, 41 :267–277, à paraître en 2004.
- D. WEICHERT. On the influence of geometrical nonlinearities on the shakedown of elastic-plastic structures. *Int. J. Plast.*, 2 :135–148, 1986.
- D. WEICHERT ET J. GROSS-WEEGE. The numerical assessment of elastic-plastic sheets under variable mechanical and thermal loads using a simplified two-surface yield condition. *Int. J. Mech. Sci.*, 30 :757–767, 1988.
- D. WEICHERT ET A. HACHEMI. Influence of geometrical nonlinearities on the shakedown of damaged structures. *Int. J. Plast.*, 14 :891–907, 1998.
- D. WEICHERT, A. HACHEMI, ET F. SCHWABE. Shakedown analysis of composites. *Mech. Res. Comm.*, 26(3) :309–318, 1999.





# Annexes



## ANNEXE A

# Les algorithmes d'optimisation de LANCELOT

Le logiciel d'optimisation utilisé, LANCELOT (**L**arge **A**nd **N**onlinear **C**onstrained **L**agrangian **O**ptimization **T**echniques), permet de résoudre des problèmes d'optimisation locale sous contraintes, linéaires ou non, présentant la particularité de posséder un grand nombre de variables d'optimisation. Comme nous l'avons vu au Chapitre I, tout problème d'optimisation sous contraintes peut être ramené à un problème d'optimisation sans contraintes grâce à la technique du Lagrangien augmenté. C'est donc naturellement que LANCELOT est structuré en deux algorithmes, l'un, AUGLAG, traitant de la partie "Lagrangien augmenté" de la résolution, et l'autre, SBMIN du problème sans contraintes associé. L'objectif de cette annexe est donc de présenter les grandes lignes de ces deux algorithmes.

## A.1 SBMIN, un algorithme d'optimisation "sans contraintes"

Cet algorithme permet de résoudre les problèmes d'optimisation ne possédant aucune contrainte autre que des contraintes de bornes sur  $\mathbf{x}$ . On écrit ces problèmes de la façon suivante :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \\ x_r^{\min} \leq x_r \leq x_r^{\max} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où  $f$  est supposée de classe  $\mathcal{C}^2$ , et où  $x_r^{\min}$  et  $x_r^{\max}$  peuvent prendre des valeurs infinies. Pour décrire l'algorithmique de la méthode, on suppose connue la valeur de  $\mathbf{x}^{(k)}$ , estimation de la solution du problème (A.1) à l'itération  $k$ . L'itération suivante a alors pour objectif d'améliorer cette estimation en trouvant l'itéré  $k+1$ , vérifiant les contraintes de bornes et diminuant sensiblement la valeur de  $f$ . Elle se décompose essentiellement en ces quelques étapes :

1. Test de la convergence à l'itération  $k$ . Cette convergence est évaluée par la valeur du gradient projeté en  $\mathbf{x}^{(k)}$ . Si l'inégalité (A.2) est satisfaite, alors l'algorithme s'arrête, sinon il passe à l'étape suivante.

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \nabla_p(\mathbf{x}^{(k)} - \nabla \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{\min}, \mathbf{x}^{\max})\|_2 \leq \eta \quad (\text{A.2})$$

où  $\eta$  est une précision à définir, et où la  $i^{\text{ème}}$  composante de la fonction gradient projeté  $\nabla_p$  est définie comme suit :

$$\nabla_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{\min}, \mathbf{x}^{\max})_i = \begin{cases} \mathbf{x}_i^{\min} & \text{si } x_i < x_r^{\min} \\ \mathbf{x}_i^{\max} & \text{si } x_i > x_r^{\max} \\ x_i & \text{si } x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

2. Construction d'une approximation quadratique  $h^{k+1}$  de la fonction  $f$  selon le principe des méthodes à région de confiance, approximation censée représenter correctement le comportement de  $f$  dans un voisinage de  $\mathbf{x}^k$  défini par le rayon de confiance  $r^{(k)}$  (*id est* tel que  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\|_2 \leq r^{(k)}$ ) :

$$h^k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^k) + \nabla^T f(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^k)^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \quad (\text{A.4})$$

où  $\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)$  est un abus de notation, c'est en fait une approximation symétrique du hessien de  $f$  en  $\mathbf{x}^k$ .

3. Résolution du sous-problème (I.13) de minimisation sans contraintes de  $h^{(k)}$ . Pour ce faire, on évalue d'abord le point de CAUCHY généralisé (méthode d'évaluation non détaillée ici). L'importance de ce point tient au fait qu'une condition nécessaire pour que l'algorithme converge vers un point où le gradient projeté est nul, est que la valeur du modèle quadratique en ce point ne dépasse pas sa valeur au point de CAUCHY.
4. La convergence de l'algorithme étant assurée par l'étape précédente, l'étape suivante consiste à réduire le modèle quadratique, afin d'améliorer la vitesse de convergence. A la fin de cette étape, on dispose d'un point  $\mathbf{z}^{(k)}$  ayant suffisamment réduit le modèle.
5. Comparaison entre la décroissance du modèle et la décroissance réelle de  $f$  entre les points  $\mathbf{x}^{(k)}$  et  $\mathbf{z}^{(k)}$ . Pour ce faire, on introduit le rapport  $\rho^{(k)}$ , défini comme suit :

$$\rho^{(k)} = \frac{f(\mathbf{x}^{(k)}) - f(\mathbf{z}^{(k)})}{h^{(k)}(\mathbf{x}^{(k)}) - h^{(k)}(\mathbf{z}^{(k)})} \quad (\text{A.5})$$

Ainsi, si ce coefficient est grand, c'est que le modèle aura reflété une bonne décroissance de  $f$ . Le mot "grand" est relatif, en effet, si la valeur de  $\rho^{(k)}$  est significativement plus grande que 1, alors la prédiction sera mauvaise.

6. Mise à jour de l'itéré  $k + 1$ . Soit  $0 < \mu < 1$ , on actualise alors l'itéré suivant la valeur du coefficient  $\rho^{(k)}$  :

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{cases} \mathbf{z}^{(k)} & \text{si } \rho^{(k)} > \mu \\ \mathbf{x}^{(k)} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Pour résumer, le modèle reflète mal la décroissance de  $f$  si  $\rho^{(k)} \leq \mu$  ou si  $\rho^{(k)} \gg 1$ , alors qu'il la reflète correctement si  $\rho^{(k)}$  est de l'ordre de 1.

## A.2 AUGLAG, un algorithme d'optimisation avec contraintes

L'algorithme AUGLAG permet, quant-à-lui, de résoudre des problèmes d'optimisation sous contraintes, de la forme :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \\ x_r^{\min} \leq x_r \leq x_r^{\max} \\ c_i(\mathbf{x}) = 0 \quad 1 \leq i \leq p \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

où les fonctions  $f$  et  $c_i$  sont supposées  $\mathcal{C}^2$  et peuvent être non linéaires. Ce problème ne fait apparaître aucune contrainte d'inégalités, car LANCELOT les traite comme des contraintes d'égalités en leur ajoutant des variables d'écart bornées (cf paragraphe I.2.2.b). Ce recours aux variables d'écart est inspiré des techniques de traitement des contraintes d'inégalités dans les algorithmes du type *simplexe*. Le principe de base de AUGLAG est d'utiliser la méthode du Lagrangien augmenté, afin de se ramener à une suite de problèmes d'optimisation sans contraintes (outre les

contraintes de bornes sur  $\mathbf{x}$ ), alors résolus par l'algorithme **SBMIN**. La fonction Lagrangien augmentée choisie ici est la suivante :

$$L_a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{S}, \mu) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \lambda_i c_i(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^p s_{ii} [c_i(\mathbf{x})]^2 \quad (\text{A.8})$$

où les  $\lambda_i$  sont les multiplicateurs de Lagrange,  $\mu$  un coefficient de pénalité, et les  $s_{ii}$  les termes diagonaux d'une matrice de coefficients d'échelle positifs. En supposant connues les expressions de  $\mathbf{x}^{(k)}$ ,  $\boldsymbol{\lambda}^{(k)}$ ,  $\mu$  et  $\mathbf{S}^{(k)}$  à l'itération  $k$ , l'itération  $k+1$  se déroule de la façon suivante :

1. Test de la convergence à l'itération  $k$ . Pour ce faire, les conditions du premier ordre de **KUHN** et **TUCKER** sont utilisées. En effet, pour qu'un point vérifiant les contraintes d'égalités soit effectivement un optimum, il faut qu'il existe des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_i$  pour lesquels le gradient projeté en  $\mathbf{x}^*$  de la fonction de Lagrange est nul. On rappelle que la fonction de Lagrange est définie comme suit :

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_i^p \lambda_i c_i(\mathbf{x}) \quad (\text{A.9})$$

Comme pour la première étape de **SBMIN**, l'algorithme s'arrêtera ici si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{(k)} - P(\mathbf{x}^{(k)} - \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}), \mathbf{x}^{\min}, \mathbf{x}^{\max})\|_2 &\leq \eta_1 \\ \|c(\mathbf{x}^{(k)})\|_2 &\leq \eta_2 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

où  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont deux petits paramètres de tolérance.

2. Minimisation de la fonction Lagrangien augmenté. Comme évoqué dans le paragraphe I.2.2.b, des valeurs de  $\frac{1}{2\mu}$  trop grandes rendent la minimisation de  $L_a$  difficile. Par contre, il a été montré que, pour des choix de multiplicateurs de Lagrange appropriés, la convergence de l'algorithme est assurée à  $\mu$  fixé, si tant est que  $\mathbf{x}$  soit proche de  $\mathbf{x}^*$ . La méthode consiste donc à augmenter progressivement  $\frac{1}{2\mu}$  jusqu'à une valeur telle que  $\mathbf{x}^{(k)}$  soit proche de  $\mathbf{x}^*$ , puis à fixer cette valeur de  $\frac{1}{2\mu}$  et à ajuster les multiplicateurs de Lagrange pour aboutir à la convergence. A chaque itération, l'algorithme sort de **SBMIN** si (A.11) est satisfaite (où  $\zeta^{(k)}$  est un autre petit paramètre) :

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - P(\mathbf{x}^{(k+1)} - \nabla_{\mathbf{x}} L_a(\mathbf{x}^{(k+1)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \mathbf{S}^{(k)}, \mu^{(k)}), \mathbf{x}^{\min}, \mathbf{x}^{\max})\|_2 \leq \zeta^{(k)} \quad (\text{A.11})$$

Finalement, si l'on a :

$$\|c(\mathbf{x}^{(k+1)})\|_2 \leq \xi^{(k)} \quad (\text{A.12})$$

où  $\xi^{(k)}$  est encore un petit paramètre, alors le paramètre de pénalisation  $\mu$  est inchangé et les multiplicateurs de Lagrange sont mis à jour ; dans le cas contraire, on augmente un peu  $\frac{1}{2\mu}$  sans agir sur les mutiplicateurs de Lagrange.

3. (a) Mise à jour, si nécessaire des multiplicateurs de Lagrange. Cette étape, devenant trop technique, compliquerait l'exposé et ne sera donc pas détaillée ici. On indique simplement que les multiplicateurs sont mis à jour en fonction des valeurs de  $\boldsymbol{\lambda}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $c(\mathbf{x})$  et  $\mu$  à l'itération  $k$ .

- 
- (b) Sinon, c'est-à-dire si (A.12) n'est pas satisfaite,  $\mu$  est réduit par l'intermédiaire de coefficients compris entre 0 et 1.





## ANNEXE B

# Quelques relations en théorie des poutres

## B.1 Loi de comportement en flexion dans le domaine élastique

On considère ici la poutre du paragraphe II.3.2 de section  $B * 2H$  et de longueur  $L$ , sollicitée en flexion pure, et l'on cherche à démontrer les relations (II.28). On suppose, pour établir ces relations, que la poutre est soumise à son extrémité libre à un effort  $\mathbf{F} = F\mathbf{y}_3$  avec  $F < 0$  et ne subit aucun effort volumique, ce qui n'ôte rien à la généralité des démonstrations. On rappelle que les hypothèses (II.1) ont conduit à chercher le déplacement selon la forme suivante :

$$\mathbf{u}(y_1, y_3) = -y_3 w'(y_1)\mathbf{y}_1 + w(y_1)\mathbf{y}_3 \quad (\text{B.1})$$

De plus, en exploitant l'hypothèse des petites perturbations, on a :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(y_3) = \mathbf{grad}_s \mathbf{u}(y_1, y_3) \quad (\text{B.2})$$

Ce qui donne :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(y_3) = \begin{bmatrix} -y_3 w'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

On retrouve donc bien le fait que les efforts sont portés par l'axe de la poutre, puisque seul  $\varepsilon_{11}$ , que l'on note  $\varepsilon$ , est non nul. On pose alors :

$$\varepsilon(y_3) = y_3 k \quad \text{avec } k = w'' \quad (\text{B.4})$$

La première étape dans la preuve des relations (II.28) est d'écrire le principe des travaux virtuels :

$$\tau_{int}(\delta \mathbf{u}) + \tau_{ext}(\delta \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \text{ CA à } 0 \quad (\text{B.5})$$

Soit donc  $\delta \mathbf{u}$  un déplacement virtuel cinématiquement admissible à 0. Les travaux des efforts extérieurs s'expriment par :

$$\tau_{ext}(\delta \mathbf{u}) = F(l) \delta u(l) \quad (\text{B.6})$$

Et les travaux intérieurs par :

$$\begin{aligned} \tau_{int}(\delta \mathbf{u}) &= - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta(\mathbf{u})) d\Omega = - \int_{\Omega} \sigma \delta \varepsilon d\Omega \\ &= - \int_S \int_0^L \sigma \delta \varepsilon dy_1 dS \\ &= \int_S \int_0^L y_3 \sigma \delta k dy_1 dS \\ &= \int_0^L \underbrace{\left[ \int_S y_3 \sigma dS \right]}_M \delta k dy_1 \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Reporter ensuite (B.6) et (B.7) dans (B.5) permettrait d'aboutir aux équations d'équilibre de la poutre, ce qui n'est pas notre discours ici. On s'intéresse par contre à trouver l'expression de  $M$  en fonction de  $k$ . On a posé :

$$M = - \int_S y_3 \sigma dS \quad (\text{B.8})$$

Or, d'après la loi de HOOKE, on a :

$$\sigma = E^Y \varepsilon \quad (\text{B.9})$$

où  $E^Y$  est le module de YOUNG de la poutre. En tenant compte de (II.27), ceci implique (B.10) :

$$\begin{aligned} M &= - \int_S y_3 E^Y \varepsilon dS = - \int_S y_3 E^Y y_3 k dS \\ &= E^Y k \int_S y_3^2 dS \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Or, le moment quadratique de la section est défini par :

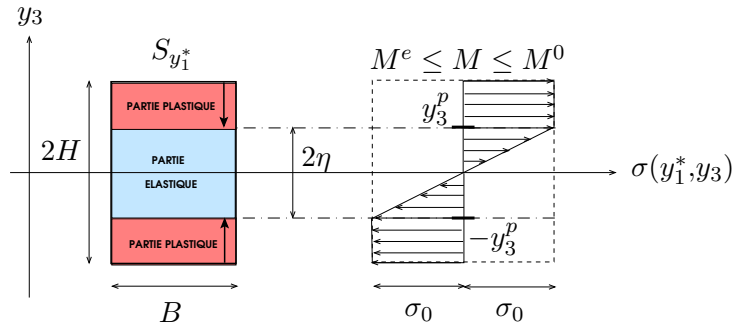
$$I = \int_S y_3^2 dS \quad (\text{B.11})$$

On retrouve donc bien la relation (II.28), valable dans le cadre de l'élasticité et permettant d'exprimer les contraintes  $\sigma(y_3)$  en fonction de l'altitude  $y_3$  dans une section quelconque :

$$\boxed{M = E^Y I k \Rightarrow M(y_1) = E^Y I k(y_1)} \quad (\text{B.12})$$

## B.2 Loi d'écrouissage

On s'intéresse maintenant à la partie plastique de la loi de comportement et l'on se propose de démontrer les relations (II.30) et (II.31), définissant respectivement la demi hauteur de la partie élastique de la poutre et la loi d'écrouissage. Pour ce faire, on raisonne sur la figure II.12, que l'on redonne ici en lui adjoignant le point  $y_3^p$ , point limite entre la zone élastique et la zone plastique. On précise que la courbure est de signe négatif sur cette figure :



### ■ Recherche du point limite de plastification

Lorsque la contrainte atteint sa valeur limite  $\sigma_0$ , l'équation :

$$\sigma(y_3) = -E^Y y_3 k \quad (\text{B.13})$$

fournit alors l'altitude du point limite entre la zone élastique et la zone de plastification :

$$y_3^p = -\frac{\sigma_0}{E^Y k} \quad (\text{B.14})$$

### ■ Recherche de la loi d'érouissage

On est donc maintenant en mesure de chercher la loi d'érouissage, reliant  $M$  et  $k$  pour des valeurs de  $M$  supérieures au moment élastique  $M^e = \frac{2}{3}\sigma_0 B H^2$ . On part de l'équation (B.14) :

$$\begin{aligned}
 M &= - \int_S y_3 \sigma dS \\
 &= - \int_0^B \int_{-H}^H y_3 \sigma dy_3 dy_2 \\
 &= -B \int_{-H}^H y_3 \sigma dy_3 \\
 &= -B \int_{-H}^{-y_3^p} y_3 \sigma_0 dy_3 + B \int_{-y_3^p}^{y_3^p} y_3 (y_3 E^Y k) dy_3 + B \int_{y_3^p}^H y_3 \sigma_0 dy_3 \\
 &= 2B \left[ \int_0^{y_3^p} y_3^2 E^Y k dy_3 + \int_{y_3^p}^H y_3 \sigma_0 dy_3 \right]
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

Or, la courbure étant constante dans l'épaisseur, on a :

$$M = 2B \left[ E^Y k \int_0^{y_3^p} y_3^2 dy_3 + \sigma_0 \int_{y_3^p}^H y_3 dy_3 \right] \tag{B.16}$$

On obtient donc, après calculs, la loi d'érouissage suivante :

$$M = \sigma_0 B H^2 \left[ 1 - \frac{\sigma_0^2}{3(E k H)^2} \right] \quad \text{si } M > \frac{2}{3}\sigma_0 B H^2 \tag{B.17}$$

#### REMARQUE B.1

On retrouve bien, quand  $k \mapsto \infty$ , le moment limite supportable par la poutre :

$$M^0 = \sigma_0 B H^2 = 2B \int_0^H y_3 \sigma_0 dy_3 \tag{B.18}$$

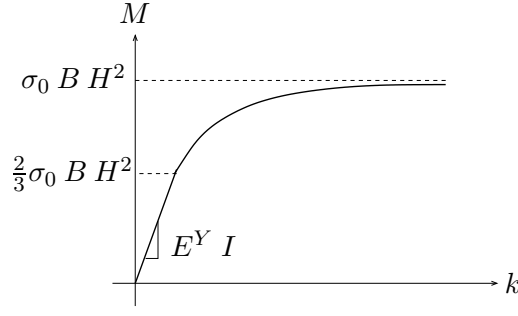
□

Le comportement en flexion de la poutre, que l'on représente sur la figure B.1, est donc entièrement déterminé par les deux lois (B.14) et (B.17).

### B.3 Expression des déformations plastiques

Connaissant l'épaisseur de la zone élastique de la poutre et la loi d'érouissage, on est désormais en mesure de donner l'expression des déformations plastiques qui prennent naissance dans la poutre dès que  $M > M^e$ . En effet, la cinématique choisie nous donne :

$$\varepsilon = y_3 k = y_3 k = \varepsilon^e + \varepsilon^p \tag{B.19}$$

FIGURE B.1 – *Comportement local de la poutre*

Or, les zones plastiques sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon^e = \frac{\sigma_0}{E^Y} & \text{et } k = \frac{\sigma_0}{E^Y y_3^p} \text{ pour } -H \leq y_3 \leq -\eta H \\ \varepsilon^e = -\frac{\sigma_0}{E^Y} & \text{et } k = -\frac{\sigma_0}{E^Y y_3^p} \text{ pour } \eta H \leq y_3 \leq H \end{array} \right. \quad (\text{B.20})$$

où  $\eta = \frac{y_3^p}{H}$ . Les déformations plastiques s'expriment donc de la manière suivante::

$$\varepsilon^p = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\sigma_0}{E} \left( \frac{y_3}{\eta H} - 1 \right) & \text{pour } -H \leq y_3 \leq -\eta H \\ 0 & \text{pour } -\eta H \leq y_3 \leq \eta H \\ \frac{\sigma_0}{E} \left( \frac{y_3}{\eta H} - 1 \right) & \text{pour } \eta H \leq y_3 \leq H \end{array} \right. \quad (\text{B.21})$$



## ANNEXE C

# Optimisation et Coefficient de sécurité à l'adaptation



On démontre ici l'interprétation donnée des résultats du problème d'optimisation  $P^{max}$ , issu du problème d'adaptation (III.1). On rappelle brièvement le principe de la méthode : on se donne un chargement  $\mathcal{P}(t)$  inclus dans un domaine borné  $\mathcal{D}$ , et l'on cherche le coefficient maximal que l'on peut appliquer à ce chargement initial, tel que le chargement final  $\alpha^{AD} \mathcal{P}(t)$  conduise à l'adaptation de la cellule de base<sup>1</sup>. Une fois ce coefficient  $\alpha^{AD}$  trouvé, afin de se placer dans le cadre du théorème du coefficient de sécurité II.2, on montre que les chargements induisant effectivement l'adaptation doivent être de la forme :

$$\mu \mathcal{P}(t) \quad \text{avec } \mu < \alpha^{AD} \quad (\text{C.1})$$

■ *Remarque préliminaire*

On suppose qu'il y a adaptation, au sens du théorème (III.1), pour le chargement  $\alpha^{AD} \mathcal{P}(t)$ . Soit  $\epsilon > 0$  :

$$\mathcal{F} \left( \alpha^{AD} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} + \bar{\boldsymbol{\rho}} \right) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F} \left( \alpha^{AD} \left( \boldsymbol{\sigma}^{(e)} + \frac{\bar{\boldsymbol{\rho}}}{\alpha^{AD}} \right) \right) \leq 0 \quad (\text{C.2})$$

or de par les propriétés de  $\mathcal{F}$ , on a :

$$\mathcal{F} \left( (\alpha^{AD} - \epsilon) \left( \boldsymbol{\sigma}^{(e)} + \frac{\bar{\boldsymbol{\rho}}}{\alpha^{AD}} \right) \right) \leq \mathcal{F} \left( \alpha^{AD} \left( \boldsymbol{\sigma}^{(e)} + \frac{\bar{\boldsymbol{\rho}}}{\alpha^{AD}} \right) \right) \quad (\text{C.3})$$

donc :

$$\mathcal{F} \left( (\alpha^{AD} - \epsilon) \left( \boldsymbol{\sigma}^{(e)} + \frac{\bar{\boldsymbol{\rho}}}{\alpha^{AD}} \right) \right) \leq 0 \quad (\text{C.4})$$

Il y a donc aussi adaptation, au sens du théorème (III.1), pour les chargements du type :

$$(\alpha^{AD} - \epsilon) \mathcal{P}(t) \quad (\text{C.5})$$

■ *Preuve de l'affirmation (III.18)*

On pose  $\beta = \frac{\alpha^{AD}}{\alpha^{AD} - \epsilon}$  et  $\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\alpha^{AD} - \epsilon}{\alpha^{AD}} \bar{\boldsymbol{\rho}}$ ,

$$\mathcal{F} \left( \alpha^{AD} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} + \bar{\boldsymbol{\rho}} \right) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F} \left( \frac{\alpha^{AD}}{\alpha^{AD} - \epsilon} \left( (\alpha^{AD} - \epsilon) \boldsymbol{\sigma}^{(e)} + \frac{\alpha^{AD} - \epsilon}{\alpha^{AD}} \bar{\boldsymbol{\rho}} \right) \right) \leq 0 \quad (\text{C.6})$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F} \left( \beta \left( (\alpha^{AD} - \epsilon) \boldsymbol{\sigma}^{(e)} + \hat{\boldsymbol{\rho}} \right) \right) \leq 0 \quad (\text{C.7})$$

La relation (C.7) étant valable pour tout chargement  $\mathcal{P}(t)$ , on a donc bien prouvé qu'il existait un coefficient de sécurité  $\beta$  et un coefficient  $\mu = \alpha^{AD} - \epsilon < \alpha^{AD}$ , tel que l'on ait :

$$\mathcal{F} \left( \beta \left( \mu \boldsymbol{\sigma}^{(e)} + \hat{\boldsymbol{\rho}} \right) \right) \leq 0 \quad \forall \mathcal{P}(t) \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (\text{C.8})$$

---

1. Ce raisonnement général s'applique aussi bien avec que sans couplage avec l'homogénéisation. La différence est que dans un cas, les problèmes sont posés sur la cellule de base, et dans l'autre, sur la structure entière.

## ANNEXE D

# Contraintes purement élastiques dans un stratifié bi-couche

On donne ici l'expression des contraintes purement élastiques prenant naissance dans un stratifié bi-couche, du fait de l'imposition d'une déformation macroscopique de la forme (III.31). Les calculs détaillés conduisant à ces résultats peuvent être trouvés dans MAGOARIEC (2000).

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{(e),i} &= \left[ \frac{(d_1^i)^2 - (d_2^i)^2}{d_1^i} + \frac{d_2^i}{d_1^i} \frac{e^1 \frac{d_2^1}{d_1^1} + e^2 \frac{d_2^2}{d_1^2}}{\frac{e^1}{d_1^1} + \frac{e^2}{d_1^2}} \right] E_{11} + \left[ \frac{(d_1^i - d_2^i) d_2^i}{d_1^i} + \frac{d_2^i}{d_1^i} \frac{e^1 \frac{d_2^1}{d_1^1} + e^2 \frac{d_2^2}{d_1^2}}{\frac{e^1}{d_1^1} + \frac{e^2}{d_1^2}} \right] E_{22} \\
&\quad + \left[ \frac{d_2^i}{d_1^i} \frac{e^1 + e^2}{\frac{e^1}{d_1^1} + \frac{e^2}{d_1^2}} \right] E_{33} \\
\sigma_{22}^{(e),i} &= \left[ \frac{(d_1^i - d_2^i) d_2^i}{d_1^i} + \frac{d_2^i}{d_1^i} \frac{e^1 \frac{d_2^1}{d_1^1} + e^2 \frac{d_2^2}{d_1^2}}{\frac{e^1}{d_1^1} + \frac{e^2}{d_1^2}} \right] E_{11} + \left[ \frac{(d_1^i)^2 - (d_2^i)^2}{d_1^i} + \frac{d_2^i}{d_1^i} \frac{e^1 \frac{d_2^1}{d_1^1} + e^2 \frac{d_2^2}{d_1^2}}{\frac{e^1}{d_1^1} + \frac{e^2}{d_1^2}} \right] E_{22} \\
&\quad + \left[ \frac{d_2^i}{d_1^i} \frac{e^1 + e^2}{\frac{e^1}{d_1^1} + \frac{e^2}{d_1^2}} \right] E_{33} \\
\sigma_{33}^{(e),i} &= \frac{\left( e^1 \frac{d_2^1}{d_1^1} + e^2 \frac{d_2^2}{d_1^2} \right)}{\frac{e^1}{d_1^1} + \frac{e^2}{d_1^2}} (E_{11} + E_{22}) + \frac{(e^1 + e^2)}{\frac{e^1}{d_1^1} + \frac{e^2}{d_1^2}} E_{33} \\
\sigma_{12}^{(e),i} &= d_3^i 2E_{12} \\
\sigma_{23}^{(e),i} &= \frac{e^1 + e^2}{\frac{e^1}{d_3^1} + \frac{e^2}{d_3^2}} 2E_{23} \\
\sigma_{13}^{(e),i} &= \frac{e^1 + e^2}{\frac{e^1}{d_3^1} + \frac{e^2}{d_3^2}} 2E_{13}
\end{aligned} \tag{D.1}$$

avec :

$$d_1^i = \frac{E^{Y,i}(1 - \nu^i)}{(1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i)}, \quad d_2^i = \frac{E^{Y,i}\nu^i}{(1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i)} \quad \text{et} \quad d_3^i = \frac{E^{Y,i}}{2(1 + \nu^i)} \tag{D.2}$$

Dans cette expression, tout comme au chapitre III, l'indice supérieur  $i$  prend la valeur 1 dans la couche 1 et la valeur 2 dans la couche 2. Pour revenir aux notations du paragraphe III.5, on a donc :

$$a(d_1^i, d_2^i, e^1, e^2) = \left[ \frac{(d_1^i)^2 - (d_2^i)^2}{d_1^i} + \frac{d_2^i}{d_1^i} \frac{e^1 \frac{d_2^1}{d_1^1} + e^2 \frac{d_2^2}{d_1^2}}{\frac{e^1}{d_1^1} + \frac{e^2}{d_1^2}} \right] \tag{D.3}$$

$$b(d_1^i, d_2^i, e^1, e^2) = \left[ \frac{(d_1^i - d_2^i) d_2^i}{d_1^i} + \frac{d_2^i}{d_1^i} \frac{e^1 \frac{d_2^1}{d_1^1} + e^2 \frac{d_2^2}{d_1^2}}{\frac{e^1}{d_1^1} + \frac{e^2}{d_1^2}} \right] \tag{D.4}$$

$$c(d_1^i, d_2^i, e^1, e^2) = \left[ \frac{d_2^i}{d_1^i} \frac{e^1 + e^2}{\frac{e^1}{d_1^1} + \frac{e^2}{d_1^2}} \right] \tag{D.5}$$

---


$$\boxed{f(d_1^i, d_2^i, e^1, e^2) = \frac{\left(e^1 \frac{d_2^1}{d_1^1} + e^2 \frac{d_2^2}{d_1^2}\right)}{\frac{e^1}{d_1^1} + \frac{e^2}{d_1^2}}} \quad (\text{D.6})$$

$$\boxed{g(d_1^i, d_2^i, e^1, e^2) = \frac{(e^1 + e^2)}{\frac{e^1}{d_1^1} + \frac{e^2}{d_1^2}}} \quad (\text{D.7})$$

$$\boxed{h(d_3^i, e^1, e^2) = \frac{e^1 + e^2}{\frac{e^1}{d_3^1} + \frac{e^2}{d_3^2}}} \quad (\text{D.8})$$





# Adaptation élastoplastique et homogénéisation périodique

**Résumé :** Ce travail est une contribution à l'analyse de la tenue mécanique de milieux hétérogènes soumis à des chargements variables et bornés. On propose une méthode numérique permettant d'étudier, par une approche directe essentiellement basée sur le théorème statique de MELAN, l'adaptation de matériaux élastoplastiques parfaits à microstructure hétérogène, périodique et tridimensionnelle. L'objectif est de coupler la théorie de l'adaptation élastoplastique, permettant d'étudier le comportement de milieux soumis à des chargements variables, avec la théorie de l'homogénéisation périodique, permettant de prendre finement en compte l'influence du comportement microscopique de milieux hétérogènes sur leur comportement macroscopique. La méthode consiste à résoudre le problème d'adaptation sur une cellule de base 3D –considérée comme une microstructure représentative des hétérogénéités– et à exprimer les résultats, par l'intermédiaire de relations de moyenne, en termes de domaines admissibles de chargements extérieurs : les déformations et contraintes macroscopiques. Numériquement, ceci se traduit par le couplage entre un code éléments finis, permettant de prendre en compte l'aspect homogénéisation du problème en formulant rigoureusement les relations de périodicité et de moyenne, et un logiciel d'optimisation non linéaire sous contraintes, permettant d'explicitier le problème d'adaptation. La méthode est appliquée à des milieux 3D classiques ainsi qu'à des structures de type plaque mince périodique. Au terme de ce travail, on dispose d'un outil numérique général, en ce sens qu'il permet d'étudier comment éviter la rupture, par dissipation plastique illimitée, de milieux périodiquement hétérogènes, et ce, quelle que soit la cellule de base 3D considérée.

**Mots-clés :** Adaptation élastoplastique, Homogénéisation périodique, Modélisation Numérique 3D, Plasticité, Éléments finis, Approche directe, Optimisation non linéaire sous contraintes.

---

## Elastic plastic shakedown and periodic homogenization

**Abstract :** This work is devoted to the analysis of the mechanical strength of heterogeneous media submitted to variable loads. Indeed, we propose a numerical method for analyzing, by a direct approach essentially based on the static theorem of MELAN, shakedown of 3D, heterogeneously periodic, and elastic-perfectly plastic media. The main objective is to couple the elastic plastic shakedown theory, which allows to study the behavior of media submitted to variable loads, and the periodic homogenization theory, which allows to take into account the influence of the microscopic behavior of heterogeneous media on the macroscopic one. The methodology consists in carrying out the shakedown analysis on a 3D unit cell –considered as a microstructure representative of the heterogeneities– and in expressing the results, thanks to average conditions, in terms of admissible domains of external loads : the macroscopic strains and stresses. Numerically, this leads to couple a finite element software, which allows to take into account the heterogeneities by rigorously expressing the periodicity and average conditions, with a nonlinear constrained optimization software, which allows to express the shakedown problem. The method is applied to classical 3D media and also to thin heterogeneous periodic plates. The resulting numerical tool is completely general : indeed, it allows to study how to avoid failure of heterogeneous media by unlimited plastic dissipation, whatever the considered 3D unit cell.

**Keywords :** Elastic plastic shakedown, Periodic homogenization, 3D Numerical Modeling, Plasticity, Finite elements, Direct approach, Nonlinear constrained optimization.